

Wichtel Wiltrud und ihre beste Freundin Yayoi sitzen im Unterricht. Yayoi wartet schon sehnsüchtig auf die nächste Pause. Mit einem Stirnrunzeln schaut sie zu der neuen Uhr, die ihre Mathelehrerin erst an diesem Morgen über der Tür angebracht hat. Es ist eine digitale Uhr, die aber nicht einfach die Zeit anzeigt. Stattdessen wird für die Stunden eine kleine Additionsaufgabe und für die Minuten eine Multiplikationsaufgabe angezeigt.

„Du, Wiltrud?“, flüstert Yayoi. „Wie lang ist es noch bis zur Pause?“ Wiltrud kichert: „Du bist ja nur zu faul zum Rechnen!“ Aber sie blickt auch zur Uhr und sagt dann: „Noch sechs Minuten – Oh! Das ist ja interessant!“

„Sechs Minuten sind lang, nicht interessant!“, murmelt Yayoi. Wiltrud hält sich eine Hand über den Mund, um nicht laut zu lachen. Sie flüstert: „Nein, ich meine, die Anzeige ist interessant! Vor genau einer Stunde hast du mich schon mal gefragt, wie lange es noch bis zur Pause ist und da habe ich auch auf die Uhr geguckt. Jetzt ist es 12:24 Uhr und die Uhr zeigt für die Minuten $8 \cdot 3$ an. Vorhin um 11:24 Uhr hat sie $3 \cdot 8$ für die Minuten angezeigt.“



„Ja, und?“, meint Yayoi. Wiltrud erklärt: „Das heißt, die Uhr zeigt für dieselbe Minutenzahl unterschiedliche Rechenaufgaben. Wie viele verschiedene Möglichkeiten die Uhr wohl hat, um die 24 Minuten anzuzeigen?“

Yayoi grinst: „Ja, da hast du Recht. Das ist schon ein bisschen interessant. Außer, dass wir trotzdem ständig rechnen müssen, um die Zeit zu wissen!“ Wiltrud grinst: „Na, dafür hast du ja mich!“

Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat die Uhr, die Zahl 24 als Produkt zweier Zahlen darzustellen?

[**Hinweis:** Vertauschte Multiplikationsaufgaben wie $8 \cdot 3$ und $3 \cdot 8$ gelten als zwei verschiedene Möglichkeiten. Die Uhr kann nur natürliche Zahlen anzeigen.]

- a) Es gibt nur die beiden Möglichkeiten, die Wiltrud beobachtet hat.
- b) Es gibt 5 verschiedene Möglichkeiten.
- c) Es gibt 8 verschiedene Möglichkeiten.
- d) Es gibt 12 verschiedene Möglichkeiten.

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Albert Clock

albertclock.com/mathe-im-advent

Albert Clock unterstützt „Mathe im Advent“ und spendet uns 15% von jeder verkauften MiA-Edition – Vielen Dank!

Lösung

Antwortmöglichkeit c) ist richtig. Es gibt 8 verschiedene Möglichkeiten, die 24 als Produkt zweier Zahlen darzustellen.

1. Lösungsweg: Alle Zahlen von 1 bis 24 als mögliche Teiler überprüfen

Du kannst die Aufgabe mithilfe einer Tabelle lösen. In die erste Spalte schreibst du dir alle Zahlen von 1 bis 24 als möglichen 1. Faktor auf. Anschließend überprüfst du für jede Zahl, ob sich die Zahl 24 ohne Rest durch sie dividieren lässt. Klappt die Division, kannst du in der mittleren Spalte den 2. Faktor eintragen. In der rechten Spalte trägst du ein, mit welchem Produkt die Uhr die Minutenzahl 24 darstellt. Diese Zeilen sind in der Tabelle grün markiert. Klappt die Division nicht, lässt du die Zeile aus. Diese Zeilen sind in der Tabelle rot markiert.

1. Faktor	2. Faktor	Produkt
1	24	$1 \cdot 24$
2	12	$2 \cdot 12$
3	8	$3 \cdot 8$
4	6	$4 \cdot 6$
5		
6	4	$6 \cdot 4$
7		
8	3	$8 \cdot 3$
9		
10		
11		
12	2	$12 \cdot 2$
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24	1	$24 \cdot 1$

Zählst du nun die verschiedenen Darstellungen zusammen, erhältst du 8 verschiedene Möglichkeiten, wie die Uhr die Minutenzahl 24 als Produkt zweier Zahlen darstellen kann. Antwortmöglichkeit c) ist richtig.

2. Lösungsweg: Muster erkennen

Bei kleineren Zahlen wie der 24 ist so eine Tabelle schnell erstellt. Doch je größer die Zahlen werden, desto länger wird auch die Tabelle. Es gibt aber einen Trick, der dir viel Arbeit spart. Sieh dir im 1. Lösungsweg noch einmal die ersten beiden Spalten der Tabelle an.

Der 1. Faktor wird immer größer. Nach dem Faktor 4 ist als nächstes der Faktor 6 grün unterlegt. Der 2. Faktor wird dafür immer kleiner. In der mittleren Spalte kommt nach der 6 die 4 als nächster Faktor. Bei den Zahlen wurde die Reihenfolge „vertauscht“. Das kannst du auch im Produkt in der rechten Spalte der Tabelle sehen.

6. Sechs interessante Minuten

1. Faktor	2. Faktor	Produkt
1	24	$1 \cdot 24$
2	12	$2 \cdot 12$
3	8	$3 \cdot 8$
4	6	$4 \cdot 6$
5		
6	4	$6 \cdot 4$

Schaust du dir die Tabelle weiter an, siehst du, dass das bei allen grün gefärbten Zeilen passiert. Um die Aufgabe zu lösen, brauchst du die Tabelle also nur so weit zu führen, bis du auf die ersten Zahlen stößt, bei denen die Reihenfolge vertauscht wurde. Anschließend fügst du zu deinen gefundenen Darstellungen der Uhr noch die vertauschten Aufgaben dazu.

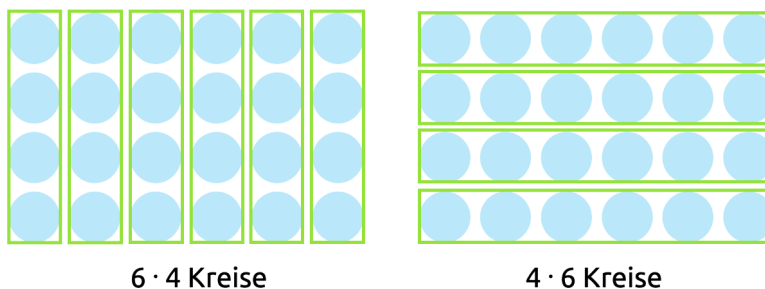
1. Faktor	1	2	3	4
2. Faktor	24	12	8	6
Produkt 1	$1 \cdot 24$	$2 \cdot 12$	$3 \cdot 8$	$4 \cdot 6$
Produkt 2	$24 \cdot 1$	$12 \cdot 2$	$8 \cdot 3$	$6 \cdot 4$

Auf diese Weise kannst du also noch schneller herausfinden, dass die Uhr 8 Möglichkeiten hat, die Minutenzahl 24 darzustellen.



Mathematische Exkursion: Kommutativgesetz und hochzusammengesetzte Zahlen

Beim Lösen der Aufgabe hast du herausgefunden, wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, die Zahl 24 als Produkt von zwei Zahlen darzustellen. Um alle möglichen Darstellungen zu finden, hast du die Faktoren in den Multiplikationsaufgaben „vertauscht“ und es kam trotzdem immer das gleiche Ergebnis heraus. Ein Beispiel dafür aus der Aufgabe ist $6 \cdot 4 = 4 \cdot 6$.



Das funktioniert tatsächlich für *alle Zahlen*, die du miteinander multiplizierst! Deshalb hat dieses Rechengesetz auch einen eigenen Namen: Es wird *Vertauschungsgesetz* oder *Kommutativgesetz* genannt – abgeleitet von dem lateinischen Verb *commutare* für vertauschen. Dieses Gesetz gilt für die Multiplikation und auch für die Addition. Wenn du also zwei (oder auch noch mehr) Zahlen addierst, kannst du die Summanden beliebig vertauschen und das Ergebnis verändert sich nicht.

Beim Lösen der Aufgabe hast du außerdem herausgefunden, dass die Zahl 24 durch 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24 ohne Rest teilbar ist. Sie hat also 8 Teiler. Eine Zahl ist durch jede Zahl *teilbar*, die bei der Division

keinen Rest ergibt. Oder andersherum: Ist eine Zahl ein Produkt von zwei ganzen Zahlen, dann sind die Faktoren zwei Teiler dieser Zahl.

Manche Zahlen lassen sich nur durch 1 und durch sich selbst ohne Rest teilen. Diese Zahlen werden *Primzahlen* genannt. Alle anderen Zahlen (bis auf die 1) haben mindestens drei Teiler. Diese Zahlen werden *zusammengesetzte Zahlen* genannt. So ist zum Beispiel die 9 eine zusammengesetzte Zahl, denn sie hat die drei Teiler 1, 3 und 9.

Manche Zahlen haben sehr viele Teiler. Solche Zahlen haben einen besonderen Namen. Wenn eine Zahl mehr Teiler hat als jede Zahl, die kleiner ist als sie, dann wird sie *hochzusammengesetzte Zahl* genannt. Die 24 aus der Aufgabe ist so eine hochzusammengesetzte Zahl. Sie hat mit 8 Teilern mehr Teiler als jede Zahl von 1 bis 23.

Zum Weiterdenken: Wie viele hochzusammengesetzte Zahlen gibt es bis zur 24?