

Da auch das Weihnachtsdorf am Nordpol vom Klimawandel betroffen ist, sind seit einigen Jahren 5000 Wichtel am Südpol stationiert und bauen ein neues Wichteldorf. Wenn der Nordpol abschmilzt, können Weihnachtsmann, Wichtel und Rentiere an den Südpol umziehen. Heute kam eine verheerende Nachricht vom dortigen Bauleiter Janibeg. Es ist eine Schneepockenepidemie ausgebrochen. 1000 Wichtel sind schon erkrankt.

„Wir brauchen hier unten dringend Arztwichtel und Medikamente, sonst können wir den Laden dicht machen!“ forderte Janibeg. In der Wichtelverwaltung bereiten nun die Leiterin Pascaline und ihre Oberwichtel den Rettungseinsatz vor. Um abzuschätzen, wie viele Arztwichtel an den Südpol geschickt werden müssen, werden wichtige Informationen gesammelt.

Die medizinische Leiterin des Weihnachtsdorfs, Taidula, meint: „Um sicher zu sein, dass auch wirklich alle kranken Wichtel gesund werden, berechnen wir die Anzahl der kranken Wichtel zum Ende jeder Stunde mit einer großzügigen Abschätzung: Zur Anzahl der kranken Wichtel am Anfang der Stunde rechnen wir 10% hinzu. Danach ziehen wir die Anzahl der in dieser Stunde behandelten Wichtel ab. Ein Arztwichtel kann 20 kranke Wichtel pro Stunde behandeln.“

Chef-Logistiker Pippin fügt an: „Es steht alles bereit. Die Arztwichtel brauchen ab jetzt 3 Stunden, um mit den Medikamenten am Südpol zu sein. In der Zeit kann kein Wichtel behandelt werden und die Epidemie breitet sich ungehindert aus. Ab der 4. Stunde können sie behandeln.“



Pascaline fragt: „Ok, wie viele Arztwichtel sollen wir nun dorthin schicken?“ Taidula antwortet: „So viele, dass alle kranken Wichtel innerhalb der nächsten 12 Stunden behandelt worden sind! Sie müssen so schnell wie möglich wieder zurückkommen, sonst bekommen wir hier ein Problem.“

Wie viele Arztwichtel werden nach Janibegs, Taidulas und Pippins Informationen mindestens am Südpol gebraucht, damit innerhalb der nächsten 12 Stunden alle kranken (inklusive sich neu ansteckenden) Wichtel behandelt werden können?

[Hinweis: Es handelt sich um eine einfache Abschätzung. Du kannst Kommazahlen beim Rechnen runden. Ebenso wird die Inkubationszeit vernachlässigt, alle sich ansteckenden Wichtel werden auch innerhalb derselben Stunde krank. Behandelte Wichtel werden sofort als gesund gezählt.]

- a) 6
- b) 8
- c) 10
- d) 12

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Das „Mathe im Advent“-Team

Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV)

<http://dmv.mathematik.de>

Lösung:

Antwortmöglichkeit d) ist richtig. Es werden 12 Arztwichtel am Südpol gebraucht, damit innerhalb von 12 Stunden alle kranken Wichtel behandelt werden können.

Aus der Aufgabenstellung kannst du folgende Informationen entnehmen:

1. Zum Zeitpunkt der Abschätzung sind 1000 Wichtel erkrankt.
2. Die Anzahl der kranken Wichtel wird zum Ende jeder Stunde berechnet.
3. In jeder Stunde steigt die Anzahl der erkrankten Wichtel um ein Zehntel.
4. Ein Arztwichtel kann pro Stunde 20 kranke Wichtel heilen.
5. Die Arztwichtel können erst ab der 4. Stunde behandeln.
6. Vom Zeitpunkt der Abschätzung sollen alle kranken Wichtel innerhalb von 12 Stunden geheilt werden.

Taidula beschreibt auch, wie die Abschätzung zu berechnen ist: Zur Anzahl der erkrankten Wichtel aus der vorangegangenen Stunde werden 10% ($= \frac{1}{10}$) addiert (siehe 2.), dann wird die Anzahl der behandelten Wichtel dieser Stunde abgezogen. Die Behandlung beginnt erst in der 4. Stunde, da vorher kein Arztwichtel vor Ort ist (siehe 5.). Erst ab dann können die behandelten Wichtel von den kranken abgezogen werden. Die Anzahl der behandelten Wichtel pro Stunde ist $20 \cdot$ Anzahl der Arztwichtel (siehe 4.). In jeder Stunde berechnet sich die Anzahl kranker Wichtel also neu aus der Anzahl der vorangegangenen Stunde.

Beispiel für 1. Stunde:

$$1000 + \frac{1}{10} \cdot 1000 - 20 \cdot 0 = 1000 + \frac{1000}{10} - 0 = 1000 + 100 = 1100.$$

Du kannst diese Rechnung zur besseren Übersicht als Formel abkürzen. Dabei wird die jeweilige Stunde mit h , die Anzahl der Arztwichtel mit a und die Anzahl der kranken in einer bestimmten Stunde mit $k(h)$ (sprich: k von h ; für h wird die jeweilige Stunde eingesetzt) bezeichnet. $k(h - 1)$ ist dann die vorangegangene Stunde.

$$k(h) = k(h - 1) + \frac{k(h - 1)}{10} - 20 \cdot a$$

Nun kannst du für h die entsprechende Stunde einsetzen (beginnend mit der ersten) und ab der 4. Stunde für a die Anzahl der Arztwichtel aus den Antwortmöglichkeiten. Da immer am Ende einer Stunde berechnet wird, ist die Ausgangsposition (1000 erkrankte Wichtel) die Stunde 0. Die ersten Rechnungen sind wie folgt:

- Am Ende der 1. Stunde hat sich die Anzahl der kranken Wichtel gegenüber der Ausgangsposition um ein Zehntel erhöht, liegt also bei 1100 (siehe Beispiel oben).

- Am Ende der 2. Stunde kommen weitere 10% Kranke hinzu: $1100 + \frac{1100}{10} = 1100 + 110 = 1210$.

- Am Ende der 3. Stunde kommen die Arztwichtel an, haben aber noch keinen Wichtel behandelt. Die Krankenzahl hat sich erhöht auf: $1210 + \frac{1210}{10} = 1331$. Dieses Ergebnis ist bis dahin noch unabhängig davon, wie viele Arztwichtel gekommen sind.

> Wenn sechs Arztwichtel an den Südpol geschickt werden ($a = 6$), ist die Anzahl der kranken Wichtel am Ende der 4. Stunde: $1331 + \frac{1331}{10} - 20 \cdot 6 = 1331 + 133,1 - 120 = 1344,1 \approx 1344$.

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.

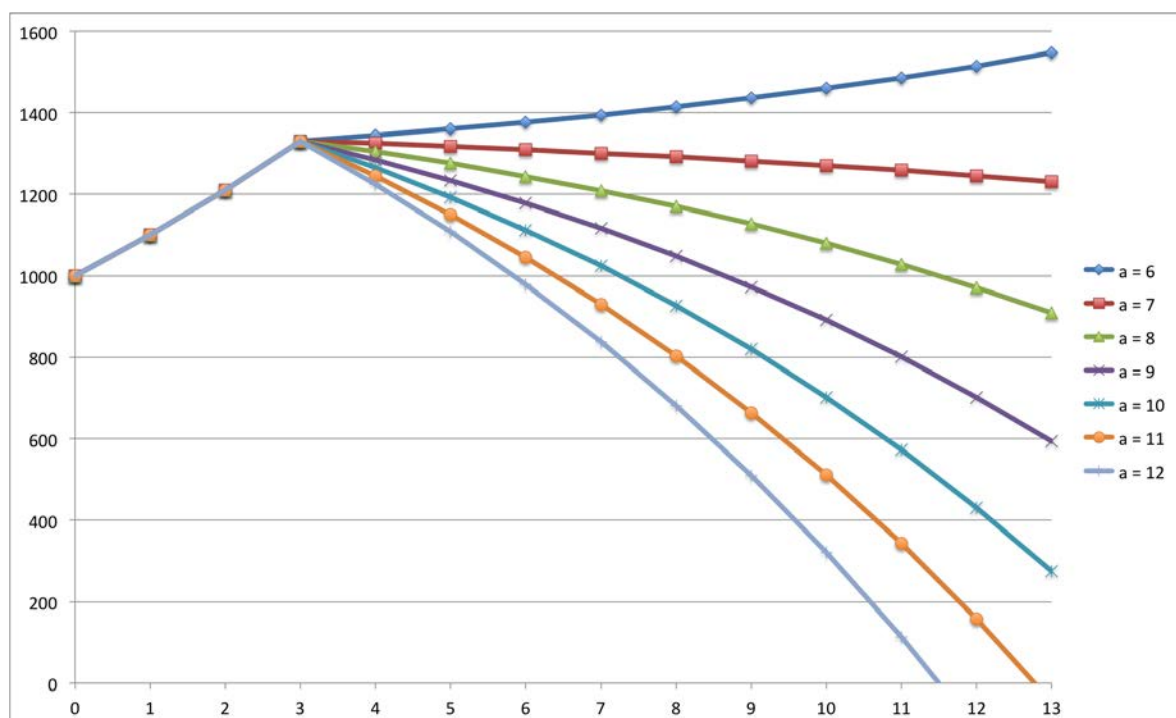
> Wenn 12 Arztwichtel geschickt werden ($a=12$), ist die Anzahl der kranken Wichtel am Ende der 4. Stunde: $1331 + \frac{1331}{10} - 20 \cdot 12 = 1331 + 133,1 - 240 = 1224,1 \approx 1224$.

Diese Rechnung kannst du nun für die Antwortmöglichkeiten bis zur 12. Stunde machen. Du musst solange probieren, bis du innerhalb von 12 Stunden auf 0 kranke Wichtel kommst. Antwortmöglichkeit a) brauchst du allerdings nicht weiterrechnen, denn du siehst jetzt schon, dass trotz der sechs Arztwichtel die Anzahl der Kranken weiter ansteigt. Die 10% Neuansteckungen werden in jeder Stunde mehr, aber es werden nur konstant 120 Behandelte abgezogen.

Am besten notierst du dir die berechneten Werte in einer Tabelle. Hier siehst du die Berechnungen nach der obigen Formel für alle Anzahlen Arztwichtel von 6 bis 12 in den ersten 13 Stunden:

h (Stunde)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
k (a = 6)	1000	1100	1210	1331	1344	1359	1375	1393	1413	1435	1459	1485	1514	1546
k (a = 7)	1000	1100	1210	1331	1324	1317	1309	1300	1291	1281	1270	1258	1244	1229
k (a = 8)	1000	1100	1210	1331	1304	1275	1243	1208	1169	1126	1079	1027	970	908
k (a = 9)	1000	1100	1210	1331	1284	1233	1177	1115	1047	972	890	800	701	592
k (a = 10)	1000	1100	1210	1331	1264	1191	1111	1023	926	819	701	572	430	274
k (a = 11)	1000	1100	1210	1331	1244	1149	1044	929	802	663	510	342	157	-47
k (a = 12)	1000	1100	1210	1331	1224	1107	978	836	680	509	320	113	-115	-367

Du siehst jetzt schon, dass nur im Fall $a = 12$ die Krankenzahlen vor der 13. Stunde auf 0 zurückgehen (negative Krankenzahlen gibt es natürlich nicht). Wenn du die Werte in einem Diagramm darstellst, kannst du die Zusammenhänge gut erkennen:



Du kannst folgendes aus dem Diagramm erkennen:

- Die Epidemie breitet sich in den ersten drei Stunden ungehindert aus. Die Werte wachsen gleich, egal wie viele Arztwichtel an den Südpol geschickt werden.
- Die Epidemie kann mit weniger als 7 Arztwichteln nicht gestoppt werden, weil bei 6 Arztwichteln der Graph ansteigt. Bei weniger als 6 Arztwichteln wird der Graph noch stärker

ansteigen. Auch bei 7 Arztwichteln wird es sehr lange dauern, bis alle Wichtel wieder gesund sind. Das siehst du an dem nur sehr leicht fallenden Graphen.

- Bei 12 Arztwichteln (oder auch mehr) kann die Epidemie innerhalb von 12 Stunden beendet werden. Bei 11 Arztwichteln braucht es noch fast 13 Stunden.
- Der Zusammenhang ist nicht proportional (oder linear). Das heißt, du kannst nicht sagen, dass mit halb so vielen Arztwichteln die Epidemie halb so schnell beendet werden kann. Es dauert mit halb so vielen Helfern sehr viel länger oder kann sogar gar nicht beendet werden!

Somit ist Antwortmöglichkeit d) mit 12 Arztwichteln die richtige Antwort.