12. Regionales Routenfärben

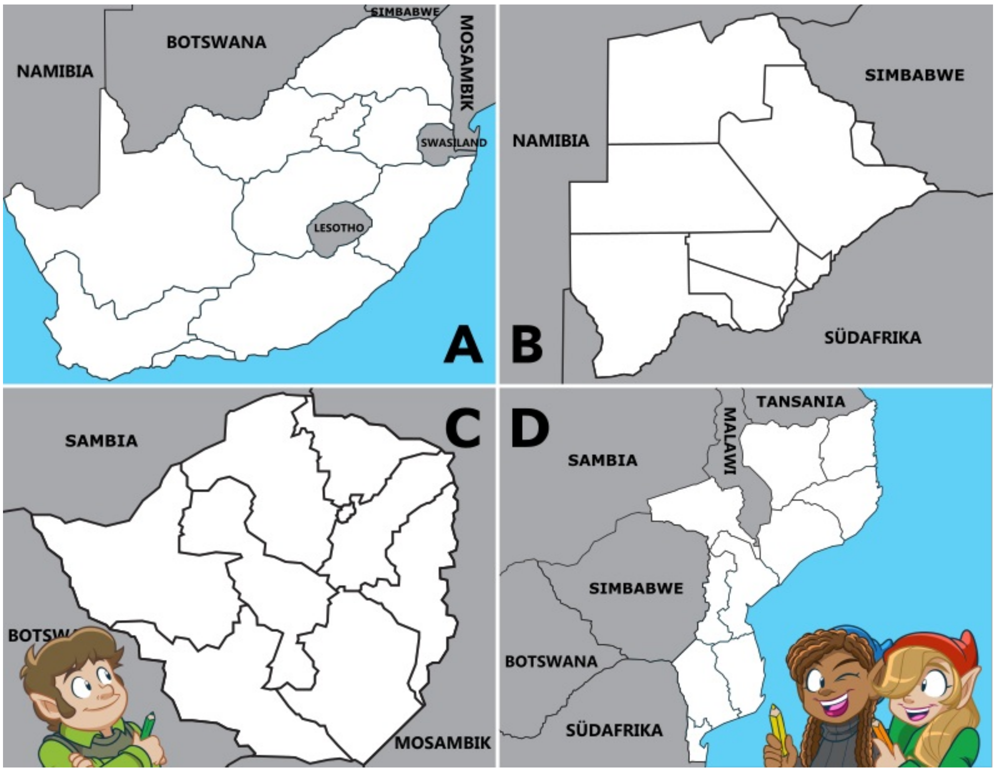
Bei der Geschenkeverteilung am Heiligen Abend muss alles schnell gehen. Der Weihnachtsmann fliegt mit seinem Schlitten in jedes Land, um alle Kinder auf der Welt zu beschenken. Damit er dabei keine Zeit verliert und kein Haus vergisst, muss die Route in jedem Land vorher genau geplant werden. Daher sitzt er gerade mit den Routenplaner-Wichteln Agathe, Pippin und Samia zusammen. Gemeinsam planen sie die Routen für dieses Jahr.

Beim Planen der Routen müssen sich die Vier jedes Land der Welt genau anschauen und festlegen, in welcher Reihenfolge die Regionen des Landes besucht werden. Dafür breitet Pippin zuerst die Karten von Afrika auf dem Tisch aus und erklärt: „Die Regionen eines Landes sind mit dünnen Linien voneinander abgegrenzt.” Der Weihnachtsmann schüttelt den Kopf: „Die Regionen sind ja alle komplett weiß, das ist ja total unübersichtlich. Wer soll denn da was erkennen?”

Agathe hat eine Idee: „Wie wäre es, wenn wir für jedes Land die Regionen farbig ausmalen? Dann lassen sie sich viel besser unterscheiden!” Die anderen finden die Idee super. Samia schlägt vor: „Am besten sucht sich jeder von uns eine Farbe aus. Damit die Regionen gut voneinander zu unterscheiden sind, dürfen wir zwei benachbarte Regionen aber nicht mit der gleichen Farbe ausmalen!”

Der Weihnachtsmann ist begeistert von der Idee: „Na das hört sich doch super an. Ich gehe jetzt erst einmal einen Tee trinken. Sagt Bescheid, wenn ihr mit dem Ausmalen fertig seid...”

Gesagt, getan. Die drei Wichtel nehmen sich die Karten der Länder im Süden Afrikas (siehe Bild) und fangen an sie mit den Farben Gelb, Orange und Grün auszumalen. Doch schnell seufzt Agathe: „Ich glaube, mit unserer Strategie funktioniert das nicht. Hier brauchen wir eine vierte Farbe...”



Auf welcher der vier abgebildeten Karten ist es nicht möglich, alle Regionen mit drei verschiedenen Farben so auszumalen, dass benachbarte Regionen nie die gleiche Farbe haben?

[**Hinweis:** Graue Flächen gehören zu einem anderen Land und werden nicht gefärbt. Das gilt insbesondere für Lesotho auf der Karte von Südafrika (Karte A). Zwei Regionen sind benachbart, wenn sie eine gemeinsame Grenze haben.

Wenn dir die Karten im Aufgabenbild zu klein sind, benutze die kontrastreiche Version. Es gibt auch eine Vorlage für eine Tastfolie/Schwellkopie (Braille).]

a) Südafrika (Karte A)
b) Botswana (Karte B)
c) Simbabwe (Karte C)
d) Mosambik (Karte D)

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

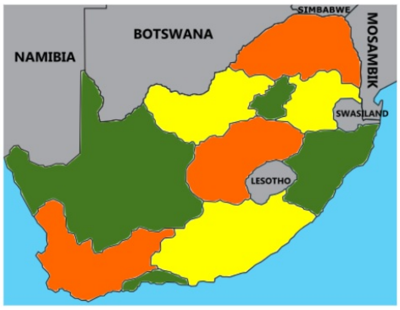
Das „Mathe im Advent"–Team
Mathe im Leben gemeinnützige GmbH
facebook.com/matheimadvent

Lösung

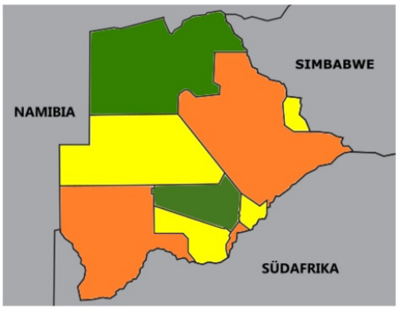
Antwortmöglichkeit c) ist richtig: Auf der Karte C von Simbabwe ist es nicht möglich, alle Regionen mit drei verschiedenen Farben so auszumalen, sodass alle benachbarten Regionen verschiedene Farben haben.

Du kannst alle Karten ausdrucken und die Regionen färben. Für die Karten A (Südafrika), B (Botswana) und D (Mosambik) kannst du Färbungen mit drei Farben finden, in der keine benachbarte Region gleich gefärbt ist:

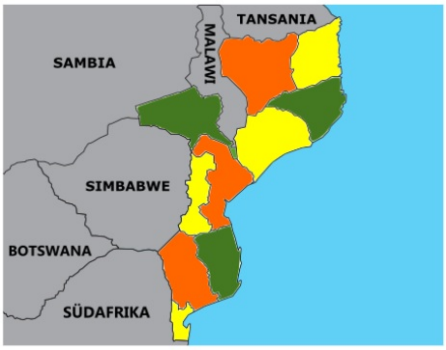
A Südafrika



B Botswana



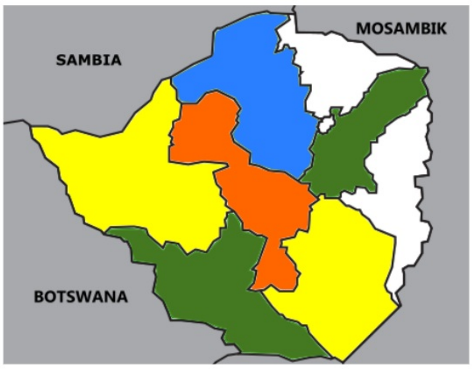
D Mosambik



Für die Karte von Simbabwe brauchst du zum Einfärben eine vierte Farbe. Die Begründung dafür ist recht einfach:

Die orange gefärbte Region im Zentrum von Zimbabwe hat fünf Nachbar-Regionen. Diese fünf Regionen können nicht orange sein, weil die Region in der Mitte schon orange ist. Fängst du im Osten an und färbst sie im Uhrzeigersinn abwechselnd Grün und Gelb, dann geht es nicht auf, weil „5“ eine ungerade Zahl ist: „Grün – Gelb – Grün – Gelb – Grün“, geht nicht, weil dann im Nordosten Grün und Grün aufeinander treffen würde – zwei benachbarte Regionen dürfen aber nicht gleich gefärbt sein. Hier benötigst du also eine vierte Farbe, im Bild ist es Blau. Damit ist Antwortmöglichkeit c) richtig.

C Simbabwe



Du kannst nun jede Landkarte sehr einfach überprüfen, ob sie mit drei Farben färbbar ist. Wenn du eine Region findest, die von einer *ungeraden* Anzahl an Regionen eingekreist ist, dann brauchst du eine vierte Farbe. Doch reichen vier Farben immer aus? Das kannst du im *Blick über den Tellerrand* erfahren.

Hinweis für den ***Förderschwerpunkt Sehen****: Du kannst die Bilder zu dieser Lösung in einer kontrastreichen Version oder als Vorlage für eine Tastfolie/Schwellkopie (Braille) herunterladen.*

Blick über den Tellerrand: Der Vier-Farben-Satz

Was schätzt du: Wie viele Farben brauchen die Wichtel, um alle Landkarten auf diese Weise färben zu können? Du weißt schon, dass die Wichtel nicht jede Karte mit drei Farben färben können. Aber das Erstaunliche ist: Mit vier Farben können sie alle Karten färben! Es dauerte mehr als 100 Jahre, bis Mathematiker*innen diese Aussage als richtig akzeptierten.

In der Mathematik geht es seit der Antike oft darum, *Vermutungen* als wahr oder falsch zu erkennen. Das sichere Erkennen, dass eine Vermutung richtig ist, nennt man einen *Beweis*. Das Beweisen kennst du sicher auch aus Detektivgeschichten. Wenn eine Vermutung sicher als falsch erkannt wird, nennt man das einen *Gegenbeweis*.

Auch *Färbeprobleme* haben in der Mathematik eine lange Tradition. Bereits 1852 hat der südafrikanische Mathematiker und Botaniker *Francis Guthrie* die sogenannte *Vier-Farben-Vermutung* aufgestellt. Sie besagt, dass du jede ebene Landkarte mit vier Farben so einfärben kannst, dass keine zwei benachbarten Regionen die gleiche Farbe bekommen. Zu dieser Vermutung kam Guthrie, als er auf einer Landkarte die Grafschaften von England einfärbte.

Guthrie konnte das Problem nicht lösen. Er schickte die Frage an seinen Mathematikprofessor *Augustus De Morgan*, der das Problem kurz darauf veröffentlichte. Bereits ein Jahr später legte der mathematikbegeisterte Jurist *Alfred Kempe* einen Beweis vor. Er meinte gezeigt zu haben, dass vier Farben für das Färbeproblem ausreichten. Das sogenannte „Vierfarbenproblem“ schien gelöst zu sein - jedenfalls für 11 Jahre. Dann entdeckte *Percy Heawood* im Jahr 1890 einen Fehler in der Beweisführung. Er konnte die Idee von Kempes Beweis allerdings benutzen, um zu zeigen, dass auf alle Fälle fünf Farben zum Färben einer Landkarte ausreichen.

Bis spät ins 20. Jahrhundert hinein gab es zur Vier-Farben-Vermutung viele Beweise und Gegenbeweise. In allen wurden aber nach gründlicher Suche Fehler gefunden. Erst 1976 wurde von *Kenneth Appel* und *Wolfgang Haken* ein noch heute gültiger Beweis gefunden. Das Besondere daran: Es war der erste mathematische Beweis, der mit Hilfe von Computern erstellt wurde.

Eine bewiesene Vermutung nennt man in der Mathematik einen *Satz*. Deshalb heißt die Vier-Farben-Vermutung von 1852 heute der *Vier-Farben-Satz*. Viele Mathematiker*innen finden den Beweis jedoch nicht sehr schön, da man sich auf die fehlerfreie Rechnung des Computers verlassen muss. Die Rechnungen per Hand nachzuvollziehen würde jedoch viel zu lange dauern. Einen Beweis des Vier-Farben-Satzes ohne Hilfe des Computers gibt es bis heute nicht.