

Ada und Cornelius schlendern spät abends noch über den Weihnachtsmarkt. Gerade kommen sie am Stand von Fragen-Fred vorbei. Als er die beiden Wichtel sieht, ruft er: „Kommse rin! Kommse ran! Hier werdense beschissen wie nebenan! Hahaha!“ Die beiden sind nach der Aktion an Lucky Lukis Stand mutig drauf und treten näher heran. „Bei mir könnt ihr tolle Preise gewinnen, wenn ihr es schafft, mein ULTIMATIVES Logik-Rätsel zu lösen!“

Fragen-Fred erklärt das Rätsel: „Hier sind fünf Tafeln aufgehängt. Auf jeder Tafel stehen auf einer Seite **eine Zahl** und auf der anderen Seite **ein Buchstabe**. Ihr seht von jeder Tafel nur eine Seite. Gleich könnt ihr **zwei Tafeln** von mir umdrehen lassen und euch die Rückseiten ansehen.

Eure Aufgabe ist folgende: Ich stelle eine Behauptung zu den fünf Tafeln auf und ihr müsst herausfinden, welche beiden Karten ihr drehen müsst, um die Behauptung überprüfen zu können. Soweit alles klar?“



Die Wichtel überlegen nicht lange und sagen: „Na dann mal los!“ Fragen-Fred schmunzelt und antwortet: „Okay. Die Behauptung lautet: *Wenn auf einer Seite einer Tafel ein E steht, dann befindet sich auf der anderen Seite immer eine 2.*“

Welche Tafeln (siehe Bild) müssen die beiden Wichtel umdrehen, um *sicher* zu wissen, ob die Behauptung wahr oder falsch ist?

[**Tipp:** „E und 2“ ist NICHT die richtige Antwort, denn die Aussage heißt nicht: „NUR wenn auf einer Seite ein E steht, steht auf der anderen eine 2.“]

- a) 2 und 7
- b) E und K
- c) E und 7
- d) K und L

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Das „Mathe im Advent“-Team
Mathe im Leben gemeinnützige GmbH
facebook.com/matheimadvent

Lösung

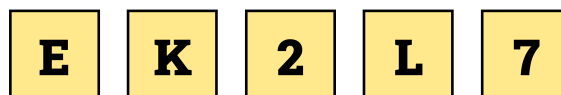
Antwortmöglichkeit c) ist richtig: Die Wichtel müssen die Tafeln mit dem E und der 7 umdrehen, um sicher zu wissen, ob die Behauptung wahr oder falsch ist.

In der Aufgabe geht es darum, eine *Behauptung* bzw. eine *Aussage* auf ihren Wahrheitsgehalt zu überprüfen. Die Behauptung lautet: „Wenn auf einer Seite einer Tafel ein E steht, dann befindet sich auf der anderen Seite immer eine 2.“ Für die Überprüfung können bzw. müssen Ada und Cornelius zwei der fünf abgebildeten Tafeln umdrehen.

Mach dir zuerst klar, was Fragen-Freds Behauptung genau bedeutet. Sie bedeutet: Sollte auf der Vorderseite der Tafel ein E stehen, dann muss auf der Rückseite eine 2 stehen. Das heißt aber auch, dass die Umkehrung gilt: Wenn auf der Rückseite eine andere Zahl als eine 2 steht, dann darf auf der Vorderseite **kein E** stehen.

Die Behauptung sagt nichts darüber aus, welcher Buchstabe auf der Vorderseite einer Karte stehen muss, wenn auf der Rückseite eine 2 steht. Die Tafel in der Mitte, die die Zahl 2 zeigt, musst du dir also nicht anschauen.

Nun sieh dir die Karten an und entscheide, welche zwei Karten auf jeden Fall umgedreht werden müssen, um zu überprüfen, ob Freds Behauptung wahr oder falsch ist.



Auf der ersten Tafel steht ein **E**. In diesem Fall schreibt die Aussage vor, dass sich auf der Rückseite zwangsläufig eine **2** befinden muss. Falls sich auf der Rückseite keine **2** befindet, wäre die Behauptung falsch. Um die Aussage zu überprüfen, musst du erste Tafel unbedingt umdrehen.

Damit sind bereits die Antwortmöglichkeiten a) und d) falsch. Du musst nur noch die beiden Antwortmöglichkeiten b) und c) prüfen. Musst du die Tafel umdrehen, auf der ein **K** steht oder die auf der die **7** steht?

Freds Behauptung sagt nichts über die Rückseite des Buchstabens **K** aus. Du weißt auch, dass auf der Rückseite der zweiten Tafel mit dem **K** eine Zahl stehen muss. Deshalb kann dort kein **E** stehen. Diese Tafel musst du deshalb nicht umdrehen.

Die **7** ist eine Zahl. Auf der anderen Seite der letzten Tafel steht also sicher ein Buchstabe. Welcher das ist, weißt du nicht. Es könnte ein **E** sein. Wenn ein **E** auf der anderen Seite steht, dann ist Freds Behauptung falsch; wenn ein anderer Buchstabe auf der anderen Seite steht, ist Freds Behauptung richtig. Deshalb musst du unbedingt die letzte Tafel mit der **7** umdrehen, um sicher zu wissen, ob die Behauptung richtig ist.

Du musst also die beiden Tafeln mit dem **E** und mit der **7** umdrehen. Antwortmöglichkeit c) ist richtig.



Mathematische Exkursion: Aussagenlogik

In der Aufgabe hast du die Aussage „Wenn auf einer Seite einer Tafel ein E steht, dann befindet sich auf der anderen Seite immer eine 2.“ überprüft. Solche und andere Aussagen sind in der Mathematik besonders wichtig. Nur mit Hilfe von Aussagen können mathematische Sachverhalte nachgewiesen werden. Deshalb gibt es in der Mathematik auch ein Gebiet, dass sich nur mit *Aussagen* und ihrer *Logik*

beschäftigt, die sogenannte *Aussagenlogik*. Sie untersucht, wann man Aussagen wahr oder falsch sind und wann *Schlussfolgerungen* logisch richtig sind.

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist, aber nie beides. Sätze, dessen Wahrheitswert wir noch nicht kennen, sind keine Aussagen. Fragen wie „In wie vielen Tagen ist Weihnachten?“ sind ebenfalls keine Aussagen, da Fragen nie wahr oder falsch sein können. Beispiele für Aussagen siehst du hier:

- „ $1 + 1 = 2$ “. Diese Aussage ist wahr.
- „Heiligabend ist dieses Jahr an einem Samstag.“ Das ist ebenfalls wahr.
- „Heiligabend ist immer an einem Samstag.“ Diese Aussage ist falsch, denn schon im nächsten Jahr wird Heiligabend an einem Sonntag sein.

In der Mathematik und auch im realen Leben sind *logische Schlussfolgerungen* besonders wichtig. Zum Beispiel *folgt* aus den beiden Aussagen „In vier Tagen ist Heiligabend“ und „Heiligabend ist dieses Jahr an einem Samstag“ die Aussage „In vier Tagen ist ein Samstag.“ Ein einfaches mathematisches Beispiel ist: Aus „2 ist kleiner als 5“ und „5 ist kleiner als 11“ folgt: „2 ist kleiner als 11“.

Eine logische Aussage der Form „aus A folgt B“ nennt man *Implikation* oder *Folgerung*. Jede Implikation kannst du auch so schreiben: „wenn A, dann B“. Die in dieser Aufgabe zu prüfende Behauptung „Wenn auf einer Seite einer Tafel ein **E** steht, dann befindet sich auf der anderen Seite immer eine **2**.“ ist so eine Implikation. Implikationen sind ebenfalls Sätze, die entweder wahr oder falsch sein können, sie sind also selbst auch Aussagen. Beispiele für Implikationen sind:

- „Wenn du in Liechtenstein lebst, dann lebst du auch in Europa.“ Diese Implikation ist wahr.
- „Wenn Weihnachten dieses Jahr an einem Samstag ist, dann ist Weihnachten jedes Jahr an einem Samstag.“ Diese Implikation ist falsch.

Diese Aufgabe sollte auch vor einem häufigen Fehler warnen: Implikationen funktionieren im Allgemeinen nur in eine Richtung. Der *Umkehrschluss* (auch Kontraposition genannt) wird oft falsch angewendet, indem man nur den ersten Halbsatz („wenn ...“) mit zweiten („dann ...“) vertauscht. Das ist aber nur für die *Verneinung* (Negation) richtig:

- Die Umkehrung „Wenn du in Europa lebst, dann lebst du auch in Liechtenstein.“ ist offensichtlich falsch.
- Der Umkehrschluss mit den Negationen „Wenn du *nicht* in Europa lebst, dann lebst du auch *nicht* in Liechtenstein.“ ist dagegen immer richtig.
- Wenn in dieser Aufgabe Freds Behauptung richtig ist, dann ist auch der Umkehrschluss wahr: „Wenn auf der Rückseite *keine* 2 steht, dann steht auf der Vorderseite *kein* E.“

Diesen Unterschied zu kennen, ist im realen Leben sehr wichtig. Insbesondere in politischen Diskussionen werden oft falsche Umkehrschlüsse gezogen. Ein häufiges Beispiel ist folgendes: „Wenn du zu faul bist, um arbeiten zu gehen, dann bist du (sehr wahrscheinlich) arbeitslos.“ Das ist im Allgemeinen eine wahre Behauptung. Oft wird daher behauptet „Wenn du arbeitslos bist, dann bist du zu faul arbeiten zu gehen.“ Es gibt aber sehr viele Gründe, warum man seine Arbeit verlieren oder keine neue finden kann. Beobachte über die Weihnachtstage einmal die Diskussionen in deiner Familie. Kannst du dort auch *falsche Umkehrschlüsse* entdecken?