

Wichtel Albert hat von Tüftelwichtel Wendel ein Päckchen erhalten. Darin befindet sich eine seltsam aussehende Uhr. Als Notiz ist beigefügt:

*Lieber Albert, stelle die Uhr um genau 0:00 Uhr an und schaue, was passiert!
Ein Tipp: Vor dem Doppelpunkt wird die Stundenzahl von 0 bis 23 angezeigt.
Dahinter wird die Minutenzahl von 0 bis 59 angezeigt.*

Albert ist neugierig und bleibt extra bis 0:00 Uhr wach. Als er die Uhr anstellt, passiert erst einmal gar nichts. Nach einer Minute blinkt das letzte Kästchen auf. Nach einer weiteren Minute erlischt es, aber dafür leuchtet nun das zweite Kästchen. Wieder vergeht eine Minute. Plötzlich leuchten beide Lämpchen! Minute für Minute blickt Albert gespannt auf die Uhr, und notiert die leuchtenden Lämpchen:

| | | | |
|----------|-----------|---|---------------|
| 0:00 Uhr | □ □ □ □ □ | : | □ □ □ □ □ □ □ |
| 0:01 Uhr | □ □ □ □ □ | : | □ □ □ □ □ □ ■ |
| 0:02 Uhr | □ □ □ □ □ | : | □ □ □ □ □ ■ □ |
| 0:03 Uhr | □ □ □ □ □ | : | □ □ □ □ □ ■ ■ |
| 0:04 Uhr | □ □ □ □ □ | : | □ □ □ □ ■ □ □ |
| 0:05 Uhr | □ □ □ □ □ | : | □ □ □ □ ■ □ ■ |
| 0:06 Uhr | □ □ □ □ □ | : | □ □ □ □ ■ ■ □ |
| 0:07 Uhr | □ □ □ □ □ | : | □ □ □ □ ■ ■ ■ |
| 0:08 Uhr | □ □ □ □ □ | : | □ □ ■ □ □ □ □ |

„So ein tolles Geschenk verdient einen Dankesbrief!“, denkt er und kramt sein Briefpapier hervor. Nach einer ganzen Weile ist sein seitenlanger Brief fertig. Da fällt ihm auf, dass er die Uhr ganz aus den Augen gelassen hat! Nun leuchtet vor dem Doppelpunkt das letzte Kästchen und dahinter leuchten das zweite und das letzte Kästchen (siehe zweites Bild unten).



Albert will nach seinem Handy greifen, um zu schauen, wie spät es inzwischen ist, doch da erwacht sein Rätsel-Sinn. Das kriege ich ja wohl auch so raus, sagt er zu sich selbst...

Wie spät ist es, als Albert nach dem Schreiben des Briefes wieder auf die Uhr guckt?

- a) 0:51 Uhr
- b) 1:10 Uhr
- c) 1:17 Uhr
- d) 1:32 Uhr

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Peter Batzer aus Mainz

Lösung

Antwortmöglichkeit c) ist richtig. Es ist 1:17 Uhr.

Lösungsweg 1: Erkenne das Muster.

Bei dieser Aufgabe sind keine Zahlen vorgegeben. Betrachtetst du dir jedoch die leuchtenden Kästchen der Uhr genau, kannst du ein Muster finden. Die Uhr besteht aus einer Stundenanzeige mit fünf Kästchen und einer Minutenanzeige mit sechs Kästchen. Du siehst im Bild, welche Lämpchen in der Minutenanzeige für die Zahlen 0 bis 8 leuchten.

| | | | |
|----------|--|---|---|
| 0:00 Uhr | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | : | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| 0:01 Uhr | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | : | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |
| 0:02 Uhr | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | : | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |
| 0:03 Uhr | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | : | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |
| 0:04 Uhr | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | : | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| 0:05 Uhr | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | : | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |
| 0:06 Uhr | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | : | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| 0:07 Uhr | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | : | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |
| 0:08 Uhr | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | : | <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |

Hierbei kannst du bereits ein Muster erkennen. Bei Minute 1, 2, 4 und 8 leuchtet jeweils nur ein Lämpchen. Und dieses befindet sich immer ein Kästchen weiter links. Von rechts gelesen, steht also das erste Kästchen für eine 1, das zweite Kästchen für eine 2, das dritte Kästchen für eine 4 und das vierte Kästchen für eine 8.

Als Albert auf seine Uhr schaut, leuchtet auf der Stundenanzeige das letzte Kästchen (bzw. das erste Kästchen von rechts). Es ist also schon später als 1:00 Uhr. Damit ist die Antwortmöglichkeit a) falsch.

Auf der Minutenanzeige leuchtet das erste und das fünfte Kästchen (von rechts). Du kannst nun überlegen, wie sich die Reihe fortsetzen wird, wenn das Lämpchen im fünften Kästchen leuchtet. Du kannst oben erkennen: Von einem Kästchen zum nächsten verdoppelt sich die Zahl: $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 2 = 4$, $4 \cdot 2 = 8$. Das fünfte Kästchen steht demnach für $8 \cdot 2 = 16$.

Zu dem fünften Kästchen (16 Minuten) kommt noch das erste Kästchen (1 Minute) dazu. Die kannst du addieren und kommst auf $16 + 1 = 17$ Minuten. Es ist also 1:17 Uhr, als Albert nach dem Schreiben des Dankesbriefs wieder auf die Uhr guckt. Antwortmöglichkeit c) ist richtig.

Lösungsweg 2: Rechne im Zweiersystem (Dualsystem oder Binärsystem).

Wenn du erkannt hast, dass die Uhrzeiten im Zweiersystem (oder Dualsystem) angegeben sind, kannst du auch damit rechnen. Im Dezimalsystem verwendest du die Ziffern von 0 bis 9. Im Dualsystem hast du nur zwei Ziffern 0 und 1 zur Verfügung. Die Zahl 2 schreibst du im Dualsystem als „10“, die Zahl 3 als „11““. Die Rätseluhr zeigt alle Uhrzeiten im Dualsystem an: ein leuchtendes Lämpchen steht für eine 1, ein nicht leuchtendes für eine 0.

Die Position der Lämpchen zeigt die Stelle der Ziffer in der Dualzahl an. Im Dualsystem steht jede Stelle der Zahl für eine *Potenz* von 2 (Zweierpotenz). Das heißt: Von rechts fängst du mit der 1 an und verdoppelst so oft, wie die Stellenzahl angibt. Das hast du bereits oben im 1. Lösungsweg entdeckt. Hier haben wir es in einer Tabelle aufgeschrieben:

| | | | | | | |
|-----------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| Dezimalsystem | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
| Dualsystem | 100000 | 10000 | 1000 | 100 | 10 | 1 |
| Position auf der Rästeluhr | 6. Lämpchen von rechts | 5. Lämpchen von rechts | 4. Lämpchen von rechts | 3. Lämpchen von rechts | 2. Lämpchen von rechts | 1. Lämpchen von rechts |

Wie du auch die Zahlen mit mehr als einer 1 vom Dualsystem ins Dezimalsystem übersetzen kannst, kannst du dir auch herleiten, wenn du dir im ersten Aufgabenbild alle Zahlen mit mehreren Lampen anschaust. Dafür eignet sich eine Tabelle. Die Position der Lämpchen wird dabei wieder von rechts angegeben.

| (Minuten-)Zahl | Leuchtende Lämpchen | Rechnung |
|----------------|---------------------|-----------------|
| 3 | 2. und 1. | $2 + 1 = 3$ |
| 5 | 3. und 1. | $4 + 1 = 5$ |
| 6 | 3. und 2. | $4 + 2 = 6$ |
| 7 | 3., 2. und 1. | $4 + 2 + 1 = 7$ |

Du addierst einfach alle Zweierpotenzen, an deren Stelle eine 1 steht und ignorierst die Stellen, an denen eine 0 steht. Als Albert nach dem Schreiben seines Briefes wieder auf die Uhr guckt, leuchten das erste und fünfte Kästchen. Das ist gleichbedeutend mit der Dualzahl „10001“ und der Dezimalzahl $16 + 1 = 17$. Die Stundenzahl kannst du direkt ablesen, da die Dualzahl 1 auch im Dezimalsystem die 1 ist.

Es ist demnach 01:17 Uhr, wenn Albert nach dem Schreiben des Dankesbriefes wieder auf die Uhr guckt. Antwortmöglichkeit c) ist richtig.



Mathematische Exkursion: Zweiersystem / Dualsystem

Die Uhrzeiten auf Alberts Uhr werden mithilfe der Lämpchen in zwei Zuständen „Lampe an“ oder „Lampe aus“ als *Dualzahlen* dargestellt. Die beiden Zustände „Lampe an“ und „Lampe aus“ kannst du auch mit den beiden Ziffern „1“ und „0“ schreiben. Man spricht dann vom Zweiersystem oder *Dualsystem* (oder auch *Binärsystem*). Im Lateinischen wird *dualis* mit „zwei enthaltend“ übersetzt. Die Zahlen im Zweiersystem heißen deshalb auch *Dualzahlen*. Man schreibt Dualzahlen häufig in runden Klammern und mit einer kleinen 2 unten rechts, um sie von den normalen Zahlen im Zehnersystem zu unterscheiden, also zum Beispiel so: $(101)_2$.

Bei der Rückübersetzung vom Dualsystem in das *Dezimalsystem* (mit den zehn Ziffern 0 bis 9) der natürlichen Zahlen, kannst du auf Potenzen der Zahl 2 zurückgreifen. Potenzen sind Produkte einer Zahl mit sich selbst. Sie entstehen aus einer Basis (Grundzahl) und einem Exponenten (Hochzahl). Ein Beispiel für eine solche Potenz ist: 2^3 .

Die „2“ ist in diesem Fall die *Basis*. Die „3“ ist der *Exponent* und wird immer oben an die Basis geschrieben. Diese Potenz bedeutet: „Multipliziere die 2 dreimal mit sich selbst!“ Das heißt: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Im Dualsystem ist die Basis aller Potenzen die „2“, wegen der zwei Ziffern 1 und 0. Jede Position steht für eine Potenz von „2“. Von rechts nach links steigt dabei der Wert des Exponenten. Die Position ganz rechts steht also für $2^0 = 1$. Mit ihr kannst du die (natürlichen) Zahlen 0 und 1 darstellen. Die Position links daneben steht für $2^1 = 2$, die nächste für $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$, dann $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ usw. Die Einsen und Nullen zeigen an, ob an den jeweiligen Positionen die Potenzen der „2“ mitgezählt werden soll („1“) oder nicht („0“). Alle Potenzen, an deren Positionen sich eine „1“ befindet, werden addiert. Daraus erhältst du die natürliche Zahl. Hier einige Beispiele:

| | $2^4 = 16$ | $2^3 = 8$ | $2^2 = 4$ | $2^1 = 2$ | $2^0 = 1$ | |
|----|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $(1)_2$ |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $(10)_2$ |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | $(11)_2$ |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | $(100)_2$ |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | $(101)_2$ |
| 9 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | $(1001)_2$ |
| 15 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | $(1111)_2$ |
| 27 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | $(11011)_2$ |

Am Beispiel der Zahl „27“ kannst du noch einmal nachvollziehen, wie die Dualzahl gebildet wird:

$$27 = 16 + 8 + 2 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11011)_2$$

Unser Zahlensystem ist das Dezimalsystem. Es funktioniert eigentlich genauso wie das Binärsystem, nur dass die Basis 10 ist und die Potenzen zwischen 0- bis 9-mal mitgezählt werden können. So ist die natürliche Zahl 123 eben genau:

$$1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 = 123$$

Es wird vermutet, dass sich bei den Menschen das Dezimalsystem auch deswegen durchgesetzt hat, weil der Mensch 10 Finger hat. Hätte der Mensch nur 8 Finger, wie es zum Beispiel die Figuren der Fernsehserie *Die Simpsons* haben, hätte sich in der Geschichte vielleicht das Zahlensystem zur Basis 8 durchgesetzt. Da es sich aber sehr gut mit Zahlen im Dezimalsystem rechnen lässt, hat es in Europa gegen Ende des Mittelalters das System der römischen Zahlen abgelöst.

Dualzahlen spielen eine große Rolle in der heutigen Technik. So kennen Computer auf Maschinenebene nur Binärzahlen. Diese werden erzeugt, indem Strom fließt (entspricht einer 1) oder kein Strom fließt (entspricht einer 0). Eine solche Stelle nennt man auch ein *Bit*. Eine Binärzahl mit 8 Stellen, also 8 Bits, nennt man ein *Byte*. Häufig hört man den Begriff auch als Teil des Wortes *Gigabyte* – zum Beispiel als Speicherplatz auf der Festplatte. Ein Gigabyte sind eine Milliarde Bytes ($1 \text{ GB} = 1\,000\,000\,000 \text{ B}$). Eine Milliarde Bytes entspricht 8 Milliarden Bits, also 8 Milliarden Einsen oder Nullen. Ein Speicherplatz von 500 GB auf der Festplatte entspricht also 4000 Milliarden Einsen und Nullen, die gespeichert werden können – eine unvorstellbar große Anzahl. Jeder Text, jedes Bild und jedes Video wird auf dem Computer in Nullen und Einsen codiert und gespeichert.