

Was sind gute Problemaufgaben? Die Qualitätskriterien von *Mathe im Advent*

Konzept für ein 4-stündiges Aufgabenseminar

Milena Damrau

Didaktische Leitung, *Mathe im Leben* gemeinnützige GmbH

Robert Wöstenfeld

Geschäftsführer, *Mathe im Leben* gemeinnützige GmbH

Stephanie Schiemann

Freie Universität Berlin, Leiterin des DMV-Netzwerkbüro Schule/Hochschule

In einem 4-stündigen Aufgabenseminar lernen Studierende das Konzept und die Qualitätskriterien von *Mathe im Advent* kennen. Ziel ist es Problemaufgaben strategisch analysieren zu lernen, um gute sowie weniger gute Aufgaben zu erkennen bzw. eigene Aufgaben zu erstellen. Es soll Studierenden helfen ihren Unterricht sowie Klassenarbeiten später mit hochwertigen Aufgaben anzureichern. Dies soll dazu beitragen das Lernen und die Motivation im Mathematik-Unterricht langfristig zu verändern: kompetenzorientiert arbeiten, neue Blickweisen entwickeln und Sinn stiften.

Die Inhalte dieses Aufgabenseminars können in Seminaren und Vorlesungen der Mathematikdidaktik eingebaut werden.

Berlin, September 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Konzept und Qualitätskriterien für <i>Mathe im Advent</i>-Aufgaben	3
1.1	Konzept	3
1.2	Qualitätskriterien	5
2	Analyse von Textaufgaben	8
2.1	Vier Beispielaufgaben zum Analysieren	8
2.1.1	Arbeitsauftrag für Studierende	8
2.1.2	Günstiges Geschenkeinkaufen	8
2.1.3	Die verlorene Ladung	9
2.1.4	Rabatt am Karussell	10
2.1.5	Bei den Bäckerwichteln	11
2.2	Exemplarische Aufgabenanalyse	12
2.3	Veröffentlichte Versionen	13
3	Beispielhafte Analyse eigener	
	<i>Mathe im Advent</i>-Aufgaben	19
3.1	Analyse von sechs Beispielen	19
3.2	Sechs gute <i>Mathe im Advent</i> -Aufgaben	21

1 Konzept und Qualitätskriterien für *Mathe im Advent*-Aufgaben

1.1 Konzept

Mit unseren Aufgaben, die wir jährlich in *Mathe im Advent* veröffentlichen, möchten wir dazu beitragen, dass die Mathematik in ihrem vielfältigen Nutzen wahrgenommen wird: sowohl als ein facettenreiches Wissensgebiet mit eigener Sprache und Kultur, als auch als ein Werkzeug zum systematischen Lösen und Modellieren von Problemen, welches kreativ, sinnvoll und gewinnbringend in der alltäglichen Welt benutzt werden kann.

Zudem soll mit unseren Mathekalender-Aufgaben das „Mathemachen“ als ein kreativer und anregender Prozess erfahren werden, welcher den in jedem Kind innewohnenden Entdeckungsdrang nutzt und fördert. Mathematikerinnen und Mathematiker suchen unentwegt nach Ideen und Lösungen, die selten ein Mensch zuvor hatte. Die Offenheit für neue Gedankengänge, das Entdecken von und das Spielen mit konkreten oder abstrakten Mustern sind dafür so elementar wie das „Weiterdenken“.

Die Aufgaben sind dafür konzipiert, so viele Schülerinnen und Schüler wie möglich – aber auch die Lehrkräfte, Eltern, Freunde und Verwandte, also alle daran interessierte Erwachsene – für die Mathematik (zurück) zu gewinnen. Der Spaß an den Geschichten mit den dazu passenden Bildern, sowie der sinnvolle Einbau der mathematischen Fragestellungen, der bei zu einfach eingekleideten Aufgaben oft zu kurz kommt, sind deshalb die unverzichtbaren Stützpfeiler der Wichtel-Aufgaben. Die Leserinnen und Leser sollen nicht schon durch die Aussicht auf eine schwierige und „unnütze“ Mathematikaufgabe abgeschreckt werden. Diese sorgen im schulischen Kontext oft für negative Erlebnisse und ein geringeres Selbstwertgefühl, was einer positiven Entwicklung im Fach Mathematik im Wege steht.

Dies sind natürlich hoch gesteckte Ziele, die wir sicher mit einigen Aufgaben der letzten Jahre auch verfehlt haben. Aus diesen wie auch aus den gelungenen Beispielen haben wir viel gelernt und mit der Zeit ein standardisiertes Verfahren zum Verfassen der Aufgaben entwickelt. Im ersten Schritt suchen wir nach interessanten Problemstellungen aus mathematischen Themenbereichen (z.B. aus den Bereichen Zahlentheorie, Gruppentheorie, Kombinatorik, Graphentheorie und Topologie), die häufig nicht oder nur peripher in der Schule behandelt werden. Wichtig dabei ist, dass die Schülerinnen und Schüler der 4. bis 6. bzw. 7. bis 9. Klassen, für die diese Aufgaben in erster Linie konzipiert sind, mit wenig schulischen Vorkenntnissen, dafür aber mit Intuition,

Neugier, ein wenig Durchhaltevermögen und „outside-the-box“-Denken die Lösungen finden können.

Im zweiten Schritt wird das mathematische Problem möglichst sinnvoll und natürlich in eine fantasie- oder humorvolle Geschichte eingebettet. Das fiktive Wichteldorf mit den Rentieren und dem Weihnachtsmann bietet dabei den weihnachtlichen Rahmen, der ganz bewusst menschliche Züge trägt. Die Schüler_innen erfahren so spielerisch, dass die Mathematik wirklich gebraucht wird, um alltägliche Probleme zu lösen und interessante Fragestellungen zu beantworten. Dabei lernen sie unbewusst auch neue Facetten der Mathematik kennen, machen Erfahrungen mit Gedankenspielen und entdecken interessante Muster.

Das Multiple-Choice-Format ist bei Millionen von eingesendeten Lösungen eine notwendige, keineswegs gewünschte Einschränkung. Wir suchen deshalb bewusst nach Geschichten und Fragestellungen, die so offen wie möglich gehalten sind, denn nichts in der Mathematik ist schlimmer als das Denken in Einbahnstraßen. Lösungen können so häufig über verschiedene Wege gefunden werden. Von denen stellen wir in unseren ausführlichen und kindgerechten Lösungen möglichst viele vor, ohne jedoch einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Die Aufgaben haben unterschiedliche Schwierigkeitsgrade, beinhalten aber keine versteckten Fallen oder trickreichen (mathematischen) Formulierungen, denn diese sind nur zum Verunsichern geeignet und bewirken bei denjenigen, denen wir ein positives Erlebnis mit der Mathematik vermitteln wollen, gerade das Gegenteil. Weiterführende Gedanken und Informationen zu den jeweiligen Themen werden in der Lösung oder danach im *Blick über den Tellerrand*, der *Mathematischen Exkursion* oder in der Kategorie *Zum Weiterdenken* angesprochen. Mit diesem Ansatz können wir die unterschiedlichen Vorkenntnisse in den verschiedenen Klassenstufen ausgleichen, ohne die Fortgeschrittenen zu langweilen. Deshalb sind die Mathe-Wichtel-Aufgaben sowohl für jüngere (Begabte ab der 2. Klasse) als auch für ältere Schülerinnen und Schüler aller Schulformen (nicht nur Gymnasien), ebenso wie für Erwachsene geeignet.

Die Gleichberechtigung der Geschlechter im Wichteldorf ist uns besonders wichtig. Obwohl in Deutschland inzwischen fast ebenso viele Frauen ein Mathematikstudium aufnehmen wie Männer, sind letztere was eine spätere Mathematikkarriere angeht nach wie vor erfolgreicher als Frauen. Erfreulicherweise gibt es in Hochschulen, Wirtschaft und Politik jedoch immer mehr positive Ausnahmen. Klassische Geschlechterrollen und Stereotypen bedienen wir daher bewusst nicht, zeichnen dabei jedoch keine utopischen Rollenbilder. Die Tatsache, dass bei *Mathe im Advent* in jedem Jahr etwas mehr als die Hälfte der Teilnehmer_innen weiblich sind, zeigt, dass wir mit diesem Ansatz erfolgreich sind und dass Mathematik nicht per se für Mädchen uninteressant ist.

1.2 Qualitätskriterien

Im Folgenden haben wir Qualitätskriterien für unsere Aufgaben zusammengefasst. Je mehr dieser Kriterien eine Aufgabe erfüllt, desto *besser* bewerten wir sie. Daher achten wir bei der Aufgabenerstellung darauf, dass die Aufgaben die meisten unserer Qualitätskriterien erfüllen. Ist dies bzgl. einer Aufgabenidee einmal nicht möglich, muss hinterfragt werden, ob sich diese Idee wirklich für eine *Mathe im Advent*-Aufgabe eignet. Viele der Kriterien können adaptiert auch für die Erstellung von Textaufgaben verwendet werden, die nicht für *Mathe im Advent* gedacht sind.

1) Interessante und/oder aktuelle Thematik:

Wir bemühen uns interessante mathematische Themen, faszinierende naturwissenschaftliche Themen (z.B. aus der Astronomie) oder /und interessante/aktuelle Themen aus Sozialpolitik und Umwelt. Gerne greifen wir Themen auf, zu denen sich interessante *Blicke über den Tellerrand*, *Mathematische Exkursionen* oder auch Aufgaben *Zum Weiterdenken* erstellen lassen. Die Schüler_innen sollen lernen, dass Mathematik nicht nur abstrakt, sondern auch in ihrer Lebenswelt nützlich sein kann. Eine gute Recherche über die thematischen Hintergründe und korrekten Informationen ist deshalb unverzichtbar.

2) Abwechslungsreiche (nicht-schulische) Mathematik:

Bei der Auswahl der mathematischen Themen bemühen wir uns sehr um Abwechslung. Es dürfen (und sollten) auch einige reine Rechenaufgaben, Aufgaben zu elementarer Geometrie oder logische Rätsel dabei sein. Wünschenswert sind jedoch vor allem Themen, die den Horizont der Schulmathematik erweitern.

3) Sinnhaftigkeit:

Die Sinnhaftigkeit der Aufgaben ist uns besonders wichtig. Wir vermeiden es, künstliche Zusammenhänge herzustellen. Es sollte klar werden, warum sich die Wichtel mit der jeweiligen Thematik beschäftigen. Dies kann allerdings auch mal eine spannende mathematische Fragestellung/Entdeckung sein und muss nicht immer direkten Anwendungsbezug haben (wobei letzterer wegen Punkt 1 wünschenswert ist). Die Fragestellung muss sich dann schlüssig aus der Geschichte ergeben und darf nicht „vom Himmel fallen“.

4) Lesespaß:

Das Lesen der Geschichte soll den Schüler_innen Spaß machen, damit sie Lust bekommen, sich später auch mit dem Problem zu beschäftigen (intrinsische Motivation). Zusätzlich ist es wertvoll, wenn auch die involvierten Erwachsenen (Eltern und Lehrkräfte) Spaß an den Aufgaben entwickeln. Sie wirken stark als Vorbild für die Kinder und Jugendlichen in der anvisierten Altersgruppe. Wenn sie echten Spaß am „Mathemachen“ haben, färbt das auch auf die Schüler_innen ab.

5) Setting/Story:

Die Geschichte selbst muss möglichst schlüssig sein. Wir stellen uns immer die Frage, ob ein Setting so Sinn macht und ob es bei aller Fiktion „realistisch“ ist. Hierbei spielt die Wichtelwelt eine entscheidende Rolle. Die einzelnen Wichtel

haben ihre eigenen Persönlichkeiten, ihre eigenen Merkmale und ihre individuellen Tagesabläufe. Diese werden in den Aufgabengeschichten immer wieder aufgegriffen. Grundsätzlich sollten die Geschichten in der Wichtelwelt spielen oder zumindest einen weihnachtlichen Bezug haben. Der Aufbau der Wichtelwelt und ihre Regeln müssen für die Kinder sinnvoll und nachvollziehbar sein, um den Nutzen der Mathematik auch auf ihre Lebenswelt übertragen zu können. Ihre Entwicklung muss zudem über die Jahre durchgängig und folgerichtig sein.

6) Gleichberechtigung:

Uns ist wichtig, dass sich möglichst alle Personengruppen in den Aufgaben wiederfinden, unabhängig von Geschlecht, Alter, ethnischer Herkunft, Religion, Weltanschauung, sexueller Identität und sonstigen Aspekten. Gleichzeitig bemühen wir uns, keine Stereotypen zu bedienen, ohne dabei eine Utopie der perfekten Gesellschaft zu erschaffen, mit der sich die Schüler_innen nicht identifizieren können.

7) Keine Bevormundung/Augenhöhe:

Pädagogik und Didaktik müssen möglichst komplett in der Geschichte verschwinden. Den Schüler_innen soll nichts „eingeflüßt“ werden, sondern ehrlich angeboten. Die intrinsische Motivation durch die sinnvollen Wichtelgeschichten wird sonst durch aufgesetzte extrinsische Motivation gestört. Unter anderem sollte die Grenze zwischen Fiktion (Wichtelwelt) und Realität (Menschenwelt) deshalb immer eingehalten werden. Nur beim Einsammeln der Wunschzettel und dem Verteilen der Geschenke treten beide im Allgemeinen in Verbindung. Ansonsten besteht die Gefahr, die Glaubwürdigkeit der Aussage „Mathe ist im Leben nützlich“ zu untergraben. Da sich die Probleme/Fragestellungen bereits schlüssig aus der Geschichte ergeben, ist eine auffordernde Frage wie „Kannst du den Wichteln helfen?“ besonders kontraproduktiv (sie durchbricht sogar die Linie zwischen Geschichte und Leser_in).

8) Fragestellung:

Die Frage muss im Rahmen von Multiple Choice zu beantworten sein. Das heißt vor allem, dass sich vier Antwortmöglichkeiten finden lassen müssen und dass die Fragestellung durch die vorgegebenen Antworten nicht trivial werden darf. Die Aufgabe muss aber gleichzeitig noch in angemessener Zeit zu lösen sein. Es ist immer genau eine Antwortmöglichkeit korrekt. Pro Kalender soll die Anzahl von einfacheren und kniffligeren Aufgaben so ausgeglichen wie möglich sein.

9) Stil:

Die Texte sollten möglichst nicht so lang sein (idealerweise inklusive Bild nicht länger als eine Din-A 4 Seite), die Satzstruktur so einfach wie möglich (altersgerecht) und das Verwenden von Fremdwörtern sollte vermieden werden. Direkte Sprache der Protagonisten sollte nicht schulbuchmäßig sein, sondern glaubhaft alltäglich. Gleichzeitig ist es wichtig, präzise zu bleiben, um keinen Interpretationsspielraum zuzulassen. Dieser Punkt steht oft im Widerspruch mit dem Punkt „Lesespaß“.

10) Wahl der Zahlenwerte:

Tauchen in der Aufgabe Zahlenwerte auf, achten wir darauf, dass sie zum einen

im jeweiligen Kontext sinnvoll und realistisch sind, zum anderen aber für die jeweiligen Schulstufen geeignet. Für die Klassen 4-6 vermeiden wir beispielsweise Dezimalzahlen und komplizierte Brüche. Die Kinder sollen mit den Zahlen schließlich gut rechnen können und nicht schon vom Anblick abgeschreckt werden.

11) Längerfristige Wirkung:

Idealerweise nehmen die Kinder etwas aus der Aufgabe mit. Dies kann ein für sie neues (mathematisches) Gebiet, ein aktuelles Thema aus Sozialpolitik oder Umwelt, oder auch mal ein (mathematisches) Spiel sein; etwas, mit dem sie sich länger beschäftigen und was zur Kommunikation darüber (und damit über Mathematik) anregt.

2 Analyse von Textaufgaben

Über einen Aufgabenwettbewerb werden jedes Jahr viele Vorschläge für **Mathe im Advent**-Aufgaben eingereicht. Viele von ihnen stammen von Kindern und Lehrer_innen, die große Freude am Mathe-Adventskalender haben. Während die Geschichten oft sehr fantasievoll sind, ist der mathematische Inhalt häufig auf das Rechnen beschränkt oder einer beliebten Aufgabe des Vorjahres nachempfunden. Aufgabenvorschläge, die für den Adventskalender ausgewählt wurden, müssen von uns hinsichtlich unserer Qualitätskriterien und einer kohärent entwickelten Wichtelwelt überarbeitet werden.

Für das Auswahlverfahren werden alle eingereichten Aufgabenvorschläge von uns zunächst grob analysiert, um zu überprüfen ob sich aus den Ideen gute Aufgaben für **Mathe im Advent** erstellen lassen. Manchmal ist die Geschichte selbst zwar nicht überzeugend, die Thematik an sich aber brauchbar. Umgekehrt inspiriert uns eine witzige Geschichte manchmal zu einer Aufgabe zu einem etwas anderen Thema.

Wir merken an dieser Stelle an, dass die Analyse der Aufgaben nach unseren Qualitätskriterien durchaus subjektiv ist. Dies ist vor allem bzgl. der Bewertung des Lesespaßes, der Sinnhaftigkeit und des Themas der Fall.

2.1 Vier Beispielaufgaben zum Analysieren

2.1.1 Arbeitsauftrag für Studierende

Analysieren Sie die folgenden vier Aufgaben anhand der Qualitätskriterien aus Kapitel 1.2. Welche Kriterien sind wie erfüllt? Welche nicht? Würden Sie die Aufgabe in der eingereichten Form verwenden? Wenn nicht, lassen sich die Aufgaben so adaptieren, dass eine „gute Aufgabe“ daraus entsteht? Versuchen Sie selbst die Aufgabenvorschläge umzuschreiben, sodass möglichst viele der Qualitätskriterien erfüllt werden.

Die vier Aufgaben wurden im Rahmen des Aufgabenwettbewerbs 2016 eingereicht.

2.1.2 Günstiges Geschenkeinkaufen ¹

Im Weihnachtswichteldorf wird mit Talern und Pfennigen bezahlt. 100 Pfennige entsprechen einem Taler. Da die Produktion der 1,2,5 Pfennigmünzen zu teuer wurde, ordnete der Weihnachtsmann vor ein paar Monaten an, dass keine 1,2 und 5 Pfennigmünzen mehr hergestellt werden sollen. Beim Einkaufen wird dann die Summe der Einkäufe

¹vorgeschlagen von Arne Leuzinger, Schüler

entsprechend auf- oder abgerundet.

Die beiden Wichtelkinder Clara und Anton schlendern über den Weihnachtsmarkt im Wichteldorf, weil sie noch Geschenke für ihre Familie einkaufen wollen. Dabei kommen sie an einem Stand vorbei, der viele schöne Sachen verkauft. Clara und Anton bleiben vor diesem Laden stehen und überlegen sich, welche Sachen sie kaufen. Nach kurzer Zeit beschließen sie, ein Räuchermännchen und die dazugehörigen Räucherkerzen für den Großvater zu kaufen. Das Räuchermännchen kostet 9,99 Taler und die Räucherkerzen 1,44 Taler. Für die Großmutter wollen sie Krippenfiguren für 6,82 Taler und für den Vater eine Schneekugel für 3,95 Taler kaufen. Der Mutter wollen sie Weihnachtspyramide für 4,51 Taler schenken. Das Teelicht dafür müssen sie zusätzlich für 3 Pfennige kaufen. Gerade als Clara dem Verkäufer die Sachen nennen möchte, sagt Anton zu ihr: „Wenn wir nicht alle Sachen auf einmal kaufen, sondern die Sachen auf mehrere Einkäufe verteilen würden, ließe sich sicherlich ein bisschen Geld sparen, da nur die Summe der Einkäufe gerundet wird. Falls wir es schaffen, so einzukaufen, dass möglichst viel abgerundet wird, können wir Geld sparen.“ Clara stimmt der Idee zu, und so schaffen sie es, ein wenig Geld zu sparen.

Auf wie viele Einkäufe müssen sie die Sachen aufteilen, um möglichst viel Geld zu sparen? Das Teelicht darf dabei allerdings nicht alleine gekauft werden.

- a) 2 Einkäufe
- b) 3 Einkäufe
- c) 4 Einkäufe
- d) 5 Einkäufe

Antwortmöglichkeit b) ist richtig. Mit 3 Einkäufen schaffen sie es, am meisten Geld, also 10 Pfennige, zu sparen.

2.1.3 Die verlorene Ladung ²

Oberwichtel Benno ist für die Rene zuständig. Das ist viel Arbeit und daher hat er in diesem Jahr die Jungwichtel Wilko und Wilma in die Lehre genommen. Die beiden wissen schon, wie man den Stall ausmistet und die Rene füttert und striegelt. Nun endlich sollen sie lernen, die Tiere vor den Schlitten zu spannen.

Der Schlitten steht den ganzen Advent über vor dem Rentierstall. Immer, wenn neue Geschenke in der Werkstatt fertiggestellt und verpackt sind, werden sie sofort auf den Schlitten geladen, damit es am Heiligen Abend schneller geht. Wilko und Wilma sehen Benno, der ihnen alles vormacht, aufmerksam zu. Bald sind sechs Rene eingespannt. „Nun werde ich die Tiere wieder ausspannen und ihr versucht das Einspannen alleine!“, sagt Benno gerade, als der Weihnachtsmann ihn zu einer dringenden Besprechung ruft. „Wartet hier, ich bin gleich wieder da“, schärft Benno Wilko und Wilma im Weggehen

²vorgeschlagen von Eva Zimmermann, Lehrerin i.R.

ein. Die beiden Wichtel sehen sich an – wie könnten sie einer solchen Versuchung widerstehen? Sie nicken nur grinsend und schwingen sich auf den Kutschbock. Es kann doch nicht so schwer sein, den Schlitten zu lenken! Eine kleine Spritztour wird etwas Schwung in den Lehrlingsalltag bringen. Bis zu Bennos Rückkehr sind sie längst wieder da.

Wilma nimmt die Zügel, Wilko ruft: „Hü-a!“ und schon saust der Schlitten los. Leider ist es doch nicht ganz so einfach, das schwere Gespann durch die Lüfte zu lenken. Der Schlitten legt sich in einer Kurve bedenklich schräg und schon rutschen zahlreiche Päckchen von der Ladefläche und fliegen Richtung Erde. An einer Wolke, die Wilma nicht rechtzeitig gesehen hat, gibt es einen Aufprall und es fallen noch einmal Päckchen hinaus. Schließlich fegt eine Sturmbö weitere Geschenke vom Schlitten. Wilko und Wilma merken von alledem nichts, da sie sich so aufs Lenken konzentrieren müssen. Sie sind heilfroh, als das Gespann vor dem Stall wieder zum Stehen kommt. Dort steht Benno mit verschränkten Armen und bösem Gesichtsausdruck. „Ja, seid ihr denn von allen guten Geistern verlassen?“, schimpft er los und zeigt dann wortlos auf die Ladefläche des Schlittens. Dort liegt nur noch ein einziges Päckchen!

Da Wilko und Wilma so zerknirscht aussehen und bisher immer sehr gelehrige, fleißige Lehrlinge waren, will Benno sie doch nicht so hart anfassen. „Wenn ihr mir sagen könnt, wie viele Päckchen ihr verloren habt, dann mache ich schnell eine Fahrt zur Erde und sammle alle wieder ein. Denkt gut nach, denn wenn ihr meine Frage nicht beantworten könnt, müsst ihr beiden die ganze Ladung zu Fuß wieder einsammeln! Also, gleich zu Anfang in der Kurve habt ihr die Hälfte der gesamten Ladung verloren, beim Zusammenstoß mit der Wolke waren es 735 688 Päckchen und dann hat der Sturm noch einmal 333333 Geschenke davongeweht. Jetzt ist nur noch ein einziges Päckchen im Schlitten!“ Wilko und Wilma denken scharf nach ...

Wie viele Päckchen haben die beiden Wichtel unterwegs verloren?

- a) 1 069 021 Päckchen
- b) 1 069 022 Päckchen
- c) 2 138 043 Päckchen
- d) 2 138 044 Päckchen

2.1.4 Rabatt am Karussell ³

Die Wichtel Fridolin, Mathis, Lennart, Ottilie und Anni machen einen Ausflug auf den Weihnachtsmarkt. Am Karussell bleiben sie stehen und lesen die Preistafel:

1 Chip: 2 €
3 Chips: 5 €

³vorgeschlagen von Elke Kuge, Mutter

8 Chips: 10 €

Jeder hat genau 4 € dabei. Wie viele Runden können sie maximal fahren, wenn sie ihr Geld zusammenlegen und clever Chips kaufen?

- a) Jeder kann 2 Runden fahren. Dann ist das Geld alle.
- b) Sie fahren 3 Runden, aber in jeder Runde kann einer nicht mitfahren.
- c) Sie fahren 3 Runden, aber in der letzten Runde kann einer nicht mitfahren.
- d) Sie fahren alle zusammen 3 Runden und haben noch einen Chip übrig.

2.1.5 Bei den Bäckerwichteln ⁴

Vor Weihnachten haben die Weihnachtswichtel ganz schön viel zu tun: Geschenke verpacken, Plätzchen backen und vieles mehr. Der Wichtel Fridolin arbeitet bei den Bäckerwichteln. Diese machen jedes Jahr Unmengen von Plätzchen. Wichtel Fridolin hat sich dieses Jahr eine Liste angefertigt, wie viele Kilogramm Plätzchen sie von jeder Sorte gemacht haben.

Liste: 4 $\frac{2}{4}$ Kg Vanillekipferl

3,8 Kg Lebkuchen

4,2 Kg Spekulatius

8/2 Kg Zimtsterne

3,4 Kg Butterplätzchen

3 $\frac{1}{4}$ Kg Buttersvanillekipferl

Nun möchte er geschickt ausrechnen, wie viele Plätzchen die Bäckerwichtel dieses Jahr gebacken haben. Fridolin hat von den einzelnen Plätzchensorten je einen gewogen: Vanillekipferl 3g, Lebkuchen 5g, Spekulatius 3g, Zimstern 4g, Butterplätzchen 4g, Buttersvanillekipferl 5g. Damit möchte er nun die insgesamte Anzahl der Plätzchen ausrechnen.

Wie viele Plätzchen wurden insgesamt dieses Jahr bei den Bäckerwichteln gebacken?

- a) 5500 Plätzchen
- b) 4000Plätzchen
- c) 6210 Plätzchen
- d) 7851 Plätzchen

Antwort c) ist richtig.

⁴vorgeschlagen von Lena Brosi, Schülerin

2.2 Exemplarische Aufgabenanalyse

Im Folgenden haben wir stichwortartig die positiven und negativen Aspekte von den vier Aufgabenvorschlägen zusammengefasst. Dies soll exemplarisch veranschaulichen, worauf wir bei der Aufgabenauswahl und -überarbeitung achten. Dieselbe Methodik verwenden wir bei der Entwicklung unserer eigener Aufgabenideen. Wir möchten damit einen Anhaltspunkt für das Erstellen eigener Mathematikaufgaben geben bzw. dazu anregen eigene Aufgabenentwürfe kritisch zu hinterfragen.

Aus allen hier vorgestellten Vorschlägen haben wir Aufgaben für *Mathe im Advent* 2016 erstellt. Teilweise haben wir die eingereichten Aufgaben dabei stark verändert. Ein Vergleich mit unseren veröffentlichten Versionen (neuer Titel in Klammern) der Aufgaben ist deshalb sinnvoll. Diese sind in Kapitel 2.3 zu finden.

Günstiges Geschenkeinkaufen

(Kalender 7-9, 5. Weg mit den Polarpfennigen!)

Positiv: aktuelles Thema (welches gut in einen *Blick über den Tellerrand* passt), interessante Fragestellung, experimentell, schult das Gefühl für Zahlen.

Negativ: Story/Setting (wer, wie, warum,...); Die Begründung der Abschaffung ist zwar realistisch, jedoch kann es für andere Aufgaben problematisch sein, wenn im gesamten Wichteldorf gerundet werden muss. Dass das Teelicht nicht alleine gekauft werden darf mag zwar auf der einen Seite Sinn machen, weil es sonst ja umsonst wäre, auf der anderen Seite fällt diese Regel hier vom Himmel und wirkt etwas gekünstelt. Die vielen verschiedenen Preise hier im Fließtext anzugeben bläht den Text auf und verwirrt – die Einbindung der Informationen muss besser strukturiert sein.

Die verlorene Ladung

(Kalender 4-6, 21. Ollo der Pechvogel)

Positiv: Verlieren von Geschenken = nette/witzige Idee zum Rückwärtsrechnen (interessante und wichtige Problemlösungsmethode), Kinder lieben die Rentiere, fantasievolle und energiegeladene Geschichte

Negativ: Länge des Texts, Setting, Sinnhaftigkeit der Geschichte, Linie zwischen Fiktion und Realität wird gebrochen (z.B. Was passiert mit den vielen Geschenken auf der Erde? Die muss doch jemand finden...), Einbettung der Informationen völlig unsinnig: Woher weiß Benno wo und wie viele Päckchen jeweils verloren wurden? Weder war er dabei, noch kann er so viele Geschenke auf einmal exakt zählen. Zudem sind die Zahlen auch für sehr kreative Kinder zu unrealistisch (333333).

Rabatt am Karussell

(Kalender 4-6, 9. Rabatt am Karussell)

Positiv: Effizientes Einkaufen ist ein nettes Thema; kann das Gefühl für Zahlen schulen (man muss sich überlegen, welche der Zahlen man wie addieren muss, um die Summe zu maximieren), Länge des Textes (nicht viel Erklärung der Szenerie nötig), differenzierte Antwortmöglichkeiten

Negativ: Story langweilig und teilweise nicht realistisch (jeder hat genau 4 Euro dabei; nur ein Karussell, warum wollen sie damit mehrmals fahren?), Zahlenwerte sind hier so gewählt, dass die Lösung zu einfach ist. Aufgezählt werden erst 3 männliche, dann 2 weibliche Wichtel (unbemerkte Geschlechterrollenverteilung). Linie zwischen Fiktion und Realität wird gebrochen (Weihnachtsmarkt ist auch ohne Wichtel weihnachtlich, niemand hat je einen Wichtel auf einem menschlichen Weihnachtsmarkt gesehen, man könnte eigenen Weihnachtsmarkt im Wichteldorf einführen, die haben in der Zeit aber alle Hände voll zu tun – nicht wirklich schlüssig in Wichtelwelt)

Bei den Bäckerwichteln

(Kalender 4-6, 5. Abends bei den Bäckerwichteln)

Positiv: nette Rechenaufgabe mit Einheiten, Dezimalzahlen und Brüchen

Negativ: Story nicht sinnvoll (warum möchte Fridolin das überhaupt wissen?), Pädagogik/Didaktik riecht man 50 Meter gegen den Wind: Niemand denkt sich „Ich möchte jetzt geschickt ausrechnen...“, zudem komische, unrealistische Zahlenwerte ($8/2$ kg).

2.3 Veröffentlichte Versionen

Auf den folgenden Seiten finden Sie die von uns überarbeiteten Versionen der vier Aufgabenvorschläge, so wie sie bei *Mathe im Advent* 2016 veröffentlicht wurden. Auf der Webseite von *Mathe im Advent* unter www.mathe-im-advent.de/aufgabenseminar/ finden Sie die Aufgaben mit Lösungen (und ggf. einem Blick über den Tellerrand) als PDF.



2016: Aufgaben Klasse 7-9

5. Weg mit den Polarpfennigen!



Evin und Samtan sind das mühsame Zählen der kleinen Münzen beim Kassieren leid. Sie wollen lieber mehr Zeit zum Backen haben. Also beschließen sie, in ihrer Konditorei ab heute keine 1, 2 und 5 Polarpfennige mehr zu akzeptieren. An den Preisen soll sich erst mal nichts ändern, sonst müssten sie ja alle Schilder neu machen. Stattdessen wird die Summe des gesamten Einkaufs der Kunden auf zehn Polarpfennige gerundet.

Auf dem Weg vom Basketballtraining kommen die Wichtel Ragna, Kasimir, Pippa und Odilo an der Bäckerei vorbei. „Ich hab sooo einen Hunger!“ stöhnt Ragna. „Wenn ihr mit reinkommt, könnt ihr euch auch was aussuchen. Ich lade euch ein!“. Das lassen sich die drei nicht zwei Mal sagen.



Schnell haben sie sich entschieden, was sie bestellen möchten. Ragna will einen ganzen Stollen (15,88 P), Kasimir möchte eine Tüte Lebkuchen (3,16 P), Pippa eine Tüte Vanillekipferl (3,35 P) und Odilo möchte gerne Evins und Samtans neueste Kreation probieren – einen Weihnachtsstrudel (12,49 P). Als sie gerade bestellen wollen, ruft Samtan aus der Backstube: "Ab heute wird gerundet!"

Ragna rechnet schnell zusammen. Alle Gebäckstücke zusammen kosten genau 34,88 P (34 Polarkronen und 88 Polarpfennige). Dieser Betrag wird auf 34,90 P aufgerundet, Ragna müsste 2 Polarpfennige mehr bezahlen. Sie überlegt: "Wenn ich die Bestellung auf mehrere Einkäufe aufteile, kann ich vielleicht Geld sparen..."

Auf wie viele Einkäufe sollte Ragna die Sachen aufteilen, um so viel wie möglich zu sparen?

- a) 4
- b) 3
- c) 2
- d) 1 (sie kann durch das Aufteilen nichts sparen)

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Arne Leuzinger (Schüler)

Lise-Meitner-Gymnasium, Leverkusen (Nordrhein-Westfalen)

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 4-6

21. Ollo der Pechvogel

In der Geschenkeabteilung sind die Kartons zum Verpacken der Geschenke ausgegangen. Oberwichtel Esmeralda hat Ollo damit beauftragt Nachschub aus dem Lager zu holen. Um nicht so oft hin und her laufen zu müssen, nimmt er so viele Kartons wie nur irgendwie möglich auf einmal. Also stapelt er so viel er kann übereinander und hebt dann den Berg voller Kartons hoch.

Vorsichtig macht er sich auf den Weg zurück in die Verpackungshalle. Doch als er das Lager verlässt, kommt Iffi um die Ecke gedüst. Die beiden stoßen zusammen und die Kartons landen auf dem Boden. „Mensch, Iffi!“ grummelt Ollo. „Du musst doch aufpassen!“

Iffi lacht: „Ach, ist doch nicht so schlimm! Komm, ich nehme dir ein paar ab.“ Iffi nimmt sich 10 Kartons und beide machen sich auf den Weg zur Geschenkeabteilung.

Kurz darauf kommen sie an eine Tür. Glücklicherweise kommt ihnen genau in diesem Augenblick Oswald entgegen, der sie höflich aufhält. Doch Ollo jongliert etwas ungeschickt und bleibt mit den Kartons oben am Türrahmen hängen. Wieder fallen sie zu Boden. Oswald hilft beim Aufheben und bietet Ollo an, die Hälfte seiner Kartons abzunehmen. Dieses Angebot nimmt Ollo natürlich sofort an.

Nach einer Weile kommt Hubertine vorbei, die gerade etwas gelangweilt ist. Begeistert fängt sie an mit ihnen zu quatschen. Um sich nicht unnütz zu fühlen, nimmt sie Ollo noch 7 Kartons aus den Händen.

Als die vier in der Geschenkeabteilung ankommen, schüttelt Oberwichtel Esmeralda nur den Kopf: „Ollo, hatte ich nicht eigentlich *dich* zum Kartons holen geschickt?“ Ollo schaut verdutzt auf seine Hände. Er hält nur noch einen einzigen Karton. Trotzdem findet er das irgendwie unfair...

Mit wie vielen Geschenkekartons ist Ollo im Lager losgelaufen?



- a) 26
- b) 25
- c) 24
- d) 23

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Eva Zimmermann (Lehrerin i.R.)

Culham/Oxfordshire, Großbritannien

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 4-6

9. Rabatt am Karussell

Kathi und Andi besuchen wie jedes Jahr den Füssener Weihnachtsmarkt. Heute haben sie ihre Freunde Mara und Micha dabei. Gleich am Eingang bleiben sie stehen, denn es gibt eine Neuerung: Statt einer Kasse an jedem Fahrgeschäft, gibt es nur noch eine zentrale Kasse. An dieser zentralen Kasse kann man sich Chips kaufen. Ein Chip kann dann an allen Fahrgeschäften für jeweils eine Fahrt eingelöst werden. An der Kasse lesen sie die Preistafel:

1 Chip:	2 €
4 Chips:	6 €
10 Chips:	12 €

„Wir bekommen Rabatt, wenn wir mehr Chips auf einmal kaufen“, stellt Kathi fest. „Wenn wir also unser Geld zusammenlegen und clever aufteilen, bekommen wir vielleicht mehr Chips, als wenn wir alle einzeln kaufen?“

Die Vier zählen ihr Geld und stellen fest, dass sie insgesamt 22 Euro dabei haben.

Wie viele Fahrten können sie *höchstens* machen, wenn sie ihr Geld beim Kauf der Chips clever aufteilen?



- a) Jeder kann höchstens 4 Fahrten machen und dann haben sie keinen Chip mehr übrig.
- b) Jeder kann höchstens 4 Fahrten machen und dann haben sie noch einen Chip übrig.
- c) Jeder kann höchstens 3 Fahrten machen und dann haben sie keinen Chip mehr übrig.
- d) Jeder kann höchstens 3 Fahrten machen und dann haben sie noch einen Chip übrig.

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Elke Kuge (Mutter)

Enger (Nordrhein-Westfalen)

<http://www.widukind-rechenmeisterschaft.de/>

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 4-6

5. Abends bei den Bäckerwichteln



In der Adventszeit haben die Bäckerwichtel jede Menge zu tun. Einige Tonnen Plätzchen müssen sie backen, um die Nachfrage im Dorf zu befriedigen. Als Oberwichtel muss Fridolin natürlich über alles Buch führen. Lehrling Odilo bekommt deshalb die Aufgabe, jede Fuhre Plätzchen nach dem Backen zu wiegen. Die Werte trägt er in eine Liste ein. Am Ende des Tages schaut sich Fridolin die Liste an und überprüft sie (siehe Bild).



„Odilo!“, ruft Fridolin. „Wie viele Plätzchen habt ihr denn heute insgesamt gebacken?“ Der antwortet verwundert: „Na, das kannst du doch zusammenrechnen... ungefähr 57 Kilogramm!“

„Nein!“ schüttelt Fridolin den Kopf. „Es geht doch um die ANZAHL der Plätzchen...“ Odilo stutzt: „Hm, das weiß ich leider nicht. Es sind doch viel zu viele, um sie alle zu zählen...“

Nach kurzem Nachdenken hat Fridolin eine Idee: „Dann wiege doch bitte, wie viel ein Keks von jeder Sorte wiegt, dann kannst du es ausrechnen.“ Odilo macht sich sofort an die Arbeit. Nach kurzer Zeit kommt er mit folgender Liste zurück:

- Vanillekipferl: 10 g
- Spekulatius: 7 g
- Lebkuchen: 25 g
- Zimtstern: 8 g
- Butterplätzchen: 3 g
- Oblate: 1 g

Wie viele Plätzchen wurden in der Wichtelbäckerei heute insgesamt gebacken?

[Hinweis: Alle hier aufgelisteten Backwaren werden in der Wichtelbäckerei als Plätzchen bezeichnet.]

- a) 6 300
- b) 7 040
- c) 8 720
- d) 10 692



2016: Aufgaben Klasse 4-6
5. Abends bei den Bäckerwichteln



Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Lena Brosi (Schülerin)

Martha-Schanzenbach-Gymnasium, Gengenbach (Baden-Württemberg)

3 Beispielhafte Analyse eigener *Mathe im Advent*-Aufgaben

Wir haben sechs Aufgaben des *Mathe im Advent*-Teams ausgewählt, die als Beispiele für Aufgaben dienen sollen, welche die meisten unserer Qualitätskriterien erfüllen. Wir haben Aufgaben mit unterschiedlichen Charakteristika ausgewählt, um Beispiele für die verschiedenen Kriterien zeigen zu können.

3.1 Analyse von sechs Beispielen

Im Folgenden wird stichwortartig erläutert wie diese Aufgaben aus unserer Sicht die Qualitätskriterien erfüllen und welche Kompromisse ggf. zwischen sich unter unseren Rahmenbedingungen widersprechenden Kriterien getroffen werden mussten. Die zugehörigen Aufgaben sind angehängt.

Kalender 4-6

19. Der Wunschzettelscanner (2016)

- Einführung in ein mathematisches Gebiet (Kodierungstheorie), welches Kinder in der Schule in der Regel nicht kennenlernen.
- Aktuelle Thematik mit Anwendungsbezug (Anwendung von fehlerkorrigierenden Codes bei der Datenübertragung)
- Interessante *Mathematische Exkursion*
- Sinnvolle, schlüssige Story und Fragestellung.
- Kompromiss: Geschenkbeispiele mussten so gewählt werden, dass die Lösung nicht sofort ersichtlich ist. Dadurch sind sie wenig repräsentativ für das was sich Kinder tatsächlich wünschen.

23. Iffi's Trick (2016)

- Witziges Spiel, mit dem Kinder ihre Freundinnen und Freunde beeindrucken können.
- Sie beschäftigen sich auch nach dem Lösen der Aufgabe mit dem Trick.
- Regt zur Kommunikation und zum Experimentieren an.

- *Zum Weiterdenken:* Funktioniert der Trick auch mit mehr oder weniger Karten? Warum?
- Schult das strukturelle Denken und das Gefühl für Zahlen.
- Mathematisches Konzept der Fallunterscheidung wird thematisiert.
- Sorgfältig ausgewählte Antwortmöglichkeiten.
- Kompromiss: Text etwas technisch für eine Kindergeschichte, um Konzept des Spiels knapp und verständlich in Geschichte einbauen zu können.

Kalender 7-9

12. Die Weihnachtsinsel (2016)

- Aktuelle sozialpolitische/umweltpolitische Thematik (Meeresspiegelanstieg).
- Wichtiger mathematischer Inhalt: Diagramm auswerten.
- Tiefgründig recherchiert: Ursachen und Auswirkungen des Meeresspiegelanstiegs nach aktueller Forschung; Verwendung von realen Daten der NASA.
- Die tatsächlich existierende Weihnachtsinsel (in der Südsee) wurde in die Geschichte eingebaut. Uriam ist ein dort gebräuchlicher Name.
- Ironie für Erwachsene: Boot in Illustration droht zu überfluten, der steigende Meeresspiegel kann dafür nicht verantwortlich sein.
- Mehrere Lösungswege möglich und erklärt.
- Lesetipps zum Weiterdenken.
- Kompromiss: etwas lange Geschichte mit Szenenwechsel, um Diagramm sinnvoll einbauen zu können.

13. Interessante Nachbarn (2016)

- Auch ohne direkten Anwendungsbezug interessanter, mathematischer Sachverhalt.
- Mathe hat auch als abstrakte Wissenschaft ihre Berechtigung
- Schlüssige Story.
- Durch die Fragestellung können die Kinder trotz Multiple-Choice-Formats mit Hilfe der gegebenen Antwortmöglichkeiten interessante Eigenschaften/Strukturen entdecken.
- Schult das Gefühl für Zahlen.

- Die Entdeckungen über Eigenschaften von Nachbarzahlen werden von einem weiblichen Wichtel gemacht. Dies soll verdeutlichen, dass mathematisches Grundinteresse und mathematische Fähigkeiten bei Frauen und Männern gleichermaßen natürlich vorhanden sind.
- Kompromiss: Text etwas technisch für eine Kindergeschichte, um Konzept knapp und verständlich in Geschichte einbauen zu können.

16. Wunschezettel aus Japan (2016)

- kritische Statistikaufgabe mit *Blick über den Tellerrand*: Vorsicht mit Prognosen!
- Interessante Thematik: Die Bevölkerungszahl Japans geht zurück.
- Blick wird auf andere Länder (hier Japan) gelenkt.
- Informationen verständlich in Geschichte eingebaut.
- Der Manga-Wichtel ist witzig und modern.
- Mathematischer Inhalt: Prozentrechnung, effizientes Rechnen (mit Prozenten), mathematische Modellierung.
- Geschichte sinnvoll ausgearbeitet.
- Kompromiss: etwas schwierige Sprache für prägnante Textstruktur.

7. Wehe, wenn sie losgelassen (2015)

- Interessantes, wichtiges mathematisches Prinzip (Schubfachprinzip).
- Interessanter *Blick über den Tellerrand*.
- Witzige Geschichte. Die Schüler_innen lieben die Rentiere.
- Für Kurzerzählung komplexer Verteilungsalgorithmus strukturiert in Geschichte eingebaut.
- Schult das strukturelle Denken.

3.2 Sechs gute Mathe im Advent-Aufgaben

Auf den folgenden Seiten finden Sie die in Kapitel 3.1 analysierten Beispielaufgaben mit Lösungen, *Mathematischen Exkursionen* und *Blicken über den Tellerrand*, so wie sie bei *Mathe im Advent* 2016 veröffentlicht wurden. Auf der Webseite von *Mathe im Advent* unter www.mathe-im-advent.de/aufgabenseminar/ finden Sie die Aufgaben als PDF.



2016: Aufgaben Klasse 4-6
19. Der Wunschzettelscanner

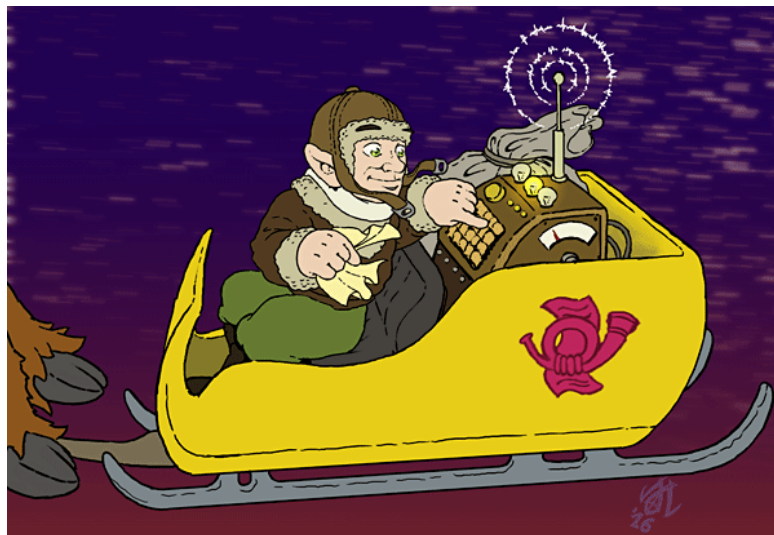


Nachdem Waldemar bei den Weihnachtspostämtern auf der ganzen Welt die Wunschzettel einsammelt und ins Weihnachtsdorf gebracht hat, dreht er immer noch eine Extra-Runde. Er fährt in Gegenden, wo die Post nur selten vorbei kommt und holt die letzten Wunschzettel persönlich ab. Dies geschieht immer kurz vor Weihnachten, deshalb müssen die Wünsche möglichst schnell zu Oberpostwichtel Bodo gelangen. Waldemar hat dafür ein spezielles Gerät. Es scannt unterwegs die Wunschzettel ein und überträgt sie zu einem Empfangsgerät in Bodos Wichtelpost.

Doch manchmal werden falsche Buchstaben übertragen. Das hat im letzten Jahr dazu geführt, dass ein Kind anstatt des gewünschten Puppenhauses eine Maus zu Weihnachten bekam. Anstatt HAUS hatte Bodo das Wort MAUS empfangen. Das Kind war natürlich sehr enttäuscht.

Damit so ein Fehler nicht wieder passiert, überträgt Waldemar jeden Wunsch jetzt immer dreimal hintereinander. Wenn bei der Übertragung ein Fehler passiert und Bodo nicht dreimal das gleiche Wort erhält, vergleicht er die Buchstaben stellenweise. Für jede Stelle nimmt er immer den Buchstaben, der am häufigsten in den drei Wörtern vorkommt. Zum Beispiel würde HAUS MAUS HAUS als Haus erkannt werden. So kann Bodo den Fehler jetzt meistens korrigieren.

Dies funktioniert aber nur dann, wenn an den jeweiligen Stellen der drei Wörter ein Buchstabe mehrmals vorkommt. HAUS MAUS LAUS kann Bodo an der ersten Stelle nicht eindeutig erkennen.



Waldemar hat gerade den Wunschzettel von Irene aus einem Dorf in Venezuela eingescannt, bei der Übertragung haben sich jedoch einige Fehler eingeschlichen. Bodo erhält an seinem Empfangsgerät für den ersten Wunsch diese drei Wörter:

KANINCHEN MUETZCHEN KAETZCHEN.

Was wünscht sich Irene?

[Hinweis: Die Umlaute Ä, Ü, Ö werden im übertragenen Text als AE, UE, OE geschrieben.]

- a) Ein Kaninchen
- b) Ein Mützchen
- c) Ein Kätzchen
- d) Ein Mäuschen



2016: Aufgaben Klasse 4-6
19. Der Wunschzettelschanner



Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Das "Mathe im Advent"-Team
Mathe im Leben gemeinnützige GmbH
<http://www.mathe-im-advent.de>



2016: Aufgaben Klasse 4-6
19. Der Wunschzettelscanner



Lösung:

Antwortmöglichkeit c) ist richtig. Irene wünscht sich ein Kätzchen.

An Bodo wurde der folgende Wunsch übertragen: KANINCHEN MUETZCHEN KAETZCHEN.

Vergleich 1. Buchstabe:

Schon der erste Buchstabe ist nicht bei allen drei Wörtern gleich. Doch da zweimal ein „K“ vorkommt und nur einmal ein „M“, ist der erste Buchstabe „K“.

Vergleich 2. Buchstabe:

An der zweiten Stelle steht zweimal ein „A“ und einmal ein „U“. Bodo wählt als zweiten Buchstaben nach seiner Methode also ein „A“ ein. Der Wunsch wird demnach mit „KA“ beginnen.

Da die letzten vier Buchstaben bei allen Wörtern gleich sind, endet der Wunsch „CHEN“.

Es kommen bis jetzt also sowohl KANINCHEN als auch KAETZCHEN infrage.

Er nimmt sich daher den 3. Buchstaben vor:

Beim dritten Buchstaben gibt es zweimal „E“ und einmal „N“. Da das „E“ in der Mehrheit ist, entscheidet er sich für dieses.

Weiter musst du nun nicht mehr prüfen, weil KANINCHEN als Möglichkeit jetzt ausscheidet. Der korrekte Wunsch kann nur KAETZCHEN heißen. Irene wünscht sich also ein Kätzchen.

Mathematische Exkursion: Kodierungstheorie

Das mathematische Gebiet, das sich mit solchen und anderen sogenannten *Kodierungen* (auch *Codes*) beschäftigt heißt *Kodierungstheorie*. In diesem geht es – anders als in der Kryptografie – nicht um die Geheimhaltung von Informationen, sondern um das Schützen vor möglichen Fehlern bei einer Übertragung von Information. Man unterscheidet hier im Wesentlichen zwischen fehlererkennenden und fehlerkorrigierenden Codes. Wie die Namen erkennen lassen, können die einen Codes Fehler „nur“ erkennen, wohingegen die anderen Codes Fehler sogar korrigieren können.

Der Code, den Waldemar und Bodo verwenden, ist ein fehlerkorrigierender Code. Allerdings können auch bei einem solchen nicht alle Fehler korrigiert werden. Im zweiten Beispiel im Text hätte Bodo den Fehler an der ersten Stelle zwar erkannt, er hätte ihn aber nicht korrigieren können.

Der verwendete Code ist ein sogenannter (*3-fach*) *Wiederholungscode*. Normalerweise wird der Text, der übertragen wird jedoch erst in Binärdarstellung übersetzt.

Das Binärsystem hast du bereits in der Aufgabe „Der Rentier-Zählautomat“ kennengelernt. Schau dort noch einmal rein (auch in die Mathematische Exkursion unter der Lösung), um dich zu erinnern, wie man Zahlen in Binärzahlen übersetzt. Um einen Text in Binärdarstellung zu bringen, kannst du



2016: Aufgaben Klasse 4-6
19. Der Wunschzettelscanner



zunächst jedem Buchstaben eine Zahl zuordnen: dem „A“ die 1, „B“ die 2, „C“ die 3 usw. bis „Z“ die 26. Diese Zahlen schreibst du dann noch in Binärdarstellung.

Du hast nun also eine Folge von Nullen und Einsen. Damit lässt sich der 3-fach Wiederholungscode noch besser anwenden, da es für jede Stelle ja nur eine Möglichkeit gibt: 0 oder 1. Bei einer 3-fachen Wiederholung können so Einzelfehler korrigiert werden. Es kann natürlich passieren, dass an einer Stelle zwei Fehler passieren, sodass dort dann eine Mehrheit vorliegt und man falsch decodieren würde. Dies ist in der Regel jedoch recht unwahrscheinlich.

Fehlerkorrigierende Codes finden vor allem dort Anwendung, wo Übertragungen nicht schnell überprüft und im Zweifel noch einmal gesendet werden können. Dies ist zum Beispiel beim Speichern von Daten auf einer CD der Fall (auf welcher dann auch Kratzer entstehen können) oder bei der Kommunikation mit Objekten im Weltraum.



2016: Aufgaben Klasse 4-6

23. Iffi's Trick

Iffi und Ollo sind mal wieder schneller fertig mit dem Verpacken als alle anderen Geschenkwichtel. Während sie warten, sagt Iffi plötzlich: „Ich habe mir gestern ein Spiel ausgedacht, so etwas hast du noch nie gesehen!“ Dann holt sie 15 Holzplättchen aus ihrer Tasche. Darauf sind 15 verschiedene Bilder gemalt.

Iffi erklärt: „Pass auf: Ich lege die Plättchen nacheinander auf drei Stapel. Das 1. Plättchen kommt auf den ersten Stapel, das 2. Plättchen auf den zweiten Stapel, das 3. auf den dritten Stapel. Das 4. Plättchen kommt wieder auf den ersten Stapel, das 5. auf den zweiten Stapel und so weiter. So entstehen Stück für Stück drei Stapel mit jeweils 5 Plättchen. Während ich das mache, suchst du dir ein Plättchen aus und merkst dir das Bild. Du darfst mir aber nicht sagen, welches Plättchen es ist.“

Gesagt getan: Iffi beginnt, die Plättchen wie beschrieben aufzuteilen. Ollo merkt sich ein Bild. Dann fragt sie ihn, in welchem der drei Stapel sich sein Bild befindet. „Im linken,“ antwortet Ollo. Ganz unschuldig hebt sie nun die drei Stapel auf und legt sie zu einem Turm zusammen. Sie achtet dabei darauf, dass sie den linken Stapel mit Ollos Bild in die Mitte, zwischen die anderen beiden Stapel legt.

Ohne zu mischen teilt sie die Plättchen dann wieder auf die gleiche Weise in drei Stapel auf und fragt Ollo, in welchem Stapel sein Plättchen ist. „Im mittleren,“ antwortet Ollo. Diesen Stapel legt sie wieder in die Mitte zwischen die beiden anderen Stapel.



Das ganze wiederholt sie noch einmal. Den Stapel mit Ollos Plättchen legt sie ein drittes Mal in die Mitte zwischen die beiden anderen Stapel. Aus dem Turm mit allen 15 Plättchen zieht sie nun ein bestimmtes Plättchen heraus. Ollo staunt: „Das ist genau das, was ich mir ausgesucht hatte!“

Klappt dieser Trick mit Iffis 15 Holzplättchen und drei Mal Austeilen und Zusammenlegen immer?

[Tipp: Probiere den Trick selbst aus!]

- a) Ja, das Plättchen befindet sich am Ende immer an der 2. Stelle im Turm.
- b) Ja, das Plättchen befindet sich am Ende immer an der 8. Stelle im Turm.
- c) Ja, das Plättchen befindet sich am Ende immer an der 11. Stelle im Turm.
- d) Nein, es war Zufall, dass Iffi das Plättchen gefunden hat.

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 4-6

23. Iffi's Trick**Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:**

Das "Mathe im Advent"-Team
Mathe im Leben gemeinnützige GmbH
<http://www.mathe-im-advent.de>



2016: Aufgaben Klasse 4-6

23. Iffi's Trick

Lösung:

Antwortmöglichkeit b) ist richtig. Das Plättchen befindet sich am Ende immer genau in der Mitte des ganzen Stapels, also an der 8. Stelle.

Am besten nimmst du dir zunächst 15 Plättchen (du kannst einfach ein Karten- oder Memoryspiel verwenden) und probierst es selbst aus. Die Idee hinter Iffi's Trick ist, dass es mit jedem Mal neu Austeilen immer weniger Plättchen gibt, auf denen Ollos gewähltes Bild sein könnte.

Am Anfang teilt Iffi die Plättchen wie beschrieben auf drei Stapel auf. Bei 15 Karten müssen in jedem Stapel 5 Plättchen sein. Ollo merkt sich dabei sein Bild und gibt an, in welchem Stapel es sich befindet. Iffi weiß jetzt bereits, welche 5 Plättchen nur noch infrage kommen.

Iffi legt die drei Stapel nun zu einem Turm zusammen, wobei sie die 5 Plättchen mit dem Ausgewählten in die Mitte legt. Nun verteilt sie den Turm wieder nach uns nach auf drei Stapel, auf die gleiche Weise wie beim ersten Mal. Es ist unwichtig, was mit den ersten 5 und den letzten 5 Plättchen passiert, da Ollos Ausgewähltes nicht darunter ist. Du musst dir nur anschauen, wie die mittleren 5 Plättchen verteilt werden. Da $5 : 3 = 1 \text{ Rest } 2$ ergibt, landen von den ersten 5 "unwichtigen" Plättchen, 2 Plättchen auf dem ersten Stapel, 2 auf dem zweiten und nur eins auf dem dritten Stapel.

Das letzte "unwichtige" Plättchen liegt also auf dem zweiten Stapel ($5 = 2 + 2 + 1$). Von den "wichtigen" 5 Plättchen, unter denen Ollos ausgewähltes Bild ist, landen deshalb 2 Plättchen auf dem dritten Stapel (weil du jetzt hier beginnst), 2 Plättchen auf dem ersten Stapel und nur eins auf dem zweiten Stapel. Danach teilt Iffi die anderen 5 "unwichtigen" Plättchen aus.

Iffi fragt Ollo nun wieder, in welchem Stapel sich sein ausgewähltes Plättchen befindet. Ist Ollos Plättchen im ersten Stapel, weiß Iffi, dass es nur noch 2 mögliche Plättchen gibt, unter denen Ollos Ausgewähltes sein kann. Das Gleiche gilt, falls Ollo sagt, dass sein Plättchen im dritten Stapel ist. Beide mögliche Plättchen liegen in den Stapeln bereits in der Mitte. Wäre Ollos Plättchen im zweiten Stapel, wüsste Iffi bereits, welches das richtige ist. Es wäre das mittlere (3. Stelle) im zweiten Stapel. Damit der Trick immer klappt, musst du aber den *ungünstigsten* Fall anschauen – den Fall, dass Ollos Plättchen im ersten oder dritten Stapel ist.

Du kannst nun beide Fälle einmal genauer untersuchen:

1. Fall: Ollos ausgewähltes Plättchen ist im ersten Stapel

Ollos Plättchen muss nach dem zweiten Mal Austeilen das dritte oder vierte Plättchen (von unten) in diesem Stapel sein. Nachdem Iffi diesen Stapel in die Mitte des Turms gelegt hat, ist Ollos Plättchen also an achter oder neunter Stelle im Turm (von unten). Iffi legt dann alle Plättchen erneut aus. Dabei landet das siebte Plättchen auf dem ersten Stapel an der dritten Stelle (also genau in der Mitte) und das achte Plättchen landet auf dem zweiten Stapel genau in der Mitte.

Jetzt zeigt Ollo ein letztes Mal auf einen der drei Stapel (es kann nur der zweite oder der dritte Stapel sein). In beiden Fällen befindet sich Ollos Plättchen *mit Sicherheit* genau in der Mitte des Stapels. Iffi weiß nun, welches Plättchen sich Ollo ausgewählt hat. Wenn Iffi nun den Stapel mit Ollos Plättchen wieder in der Mitte zwischen den beiden anderen Stapeln einfügt, befindet sich Ollos Bild genau in der Mitte des Turms, also an der achten Stelle.

Es fehlt noch der andere Fall:



2016: Aufgaben Klasse 4-6

23. Iffi's Trick2. Fall: Ollos ausgewähltes Plättchen ist im dritten Stapel

Wenn Ollos Plättchen nach dem zweiten Mal Austeilen im dritten Stapel ist, funktioniert es genau so. Es befindet sich dort an 2. oder 3. Stelle. Legt Iffi diesen Stapel nun wieder in die Mitte des Turms, liegt Ollos Plättchen an der 7. oder der 8. Stelle. Nach erneutem Austeilen wird Ollos Plättchen also genau in der Mitte (an 3. Stelle) des ersten oder zweiten Stapels liegen. Egal, auf welchen Stapel Ollo jetzt zeigt, wird nach dem Zusammenlegen zu einem Turm das Plättchen darin an 8. Stelle (genau in der Mitte) liegen.

Du kannst dir überlegen, was passiert, wenn du anstatt 15 Plättchen eine andere Anzahl an Plättchen verwendest. Die Anzahl sollte durch 3 teilbar sein, damit auf allen drei Stapeln immer gleich viele Plättchen landen. Funktioniert der Trick mit 18 Plättchen? Mit 21? Mit 27? Mit 33? Probiere es aus und überlege, was passiert!



2016: Aufgaben Klasse 7-9
12. Die Weihnachtsinsel



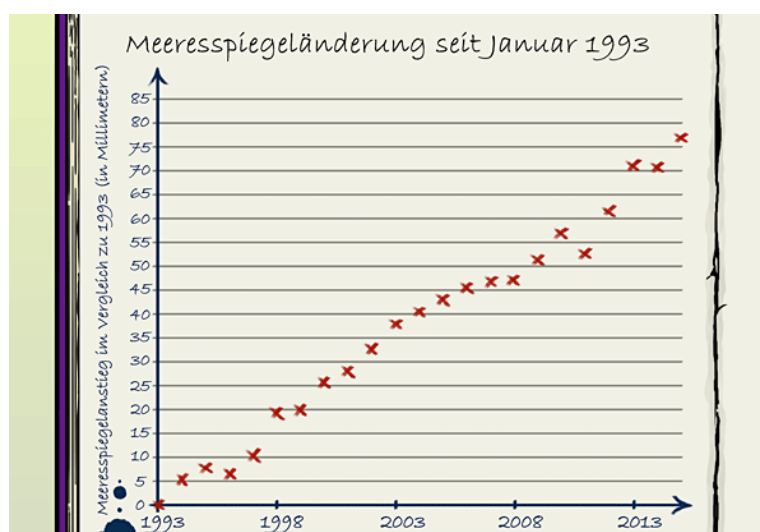
Eddie mag die hektische Adventszeit im Weihnachtsdorf nicht besonders. Seitdem er in Rente ist, entflieht er deshalb jeden Winter zum Angeln in die Südsee. Er besucht seinen Freund Uriam, der auf der Insel Kirimati wohnt. Dort ist es wunderbar ruhig. Gemeinsam schippern sie dann mit einem kleinen Boot um die Nachbarinseln und angeln. Uriam erzählt dabei vom Leben in der Südsee:

„Es ist hier gar nicht so ruhig wie du glaubst. Der Meeresspiegel steigt und das Meer kommt immer näher an unsere Dörfer heran. In den letzten Jahren mussten immer mehr Inselbewohner ihre Häuser versetzen. Manche Inselabschnitte sind sogar schon komplett überflutet worden...“

„Das ist ja furchtbar...“ erwidert Eddie besorgt. „Na ja,“ meint Uriam, „wir können hier auch nicht viel dagegen machen. Und woanders wollen wir auch nicht hin.“ Plötzlich zappelt Eddies Angel – ein besonders großer Fisch hat angebissen! Mit gemeinsamen Kräften versuchen sie den Fang an Land zu ziehen...



Das Gespräch lässt Eddie nicht los. Zurück auf Kirimati macht er sich sofort an die Suche nach Informationen. Er erfährt, dass manche Nachbarinseln schon ganz verschwunden sind. Er liest, dass der steigende Meeresspiegel wohl nicht allein dafür verantwortlich ist. Eindeutig steht aber fest, dass der Meeresspiegel steigt und dies für viele Inseln ein Problem ist. Er findet ein Diagramm, das die Änderung des Meeresspiegels seit 1993 anzeigt:



Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 7-9
12. Die Weihnachtsinsel



„Krass, wie schnell der Meeresspiegel gestiegen ist...“, murmelt Eddie in seinen Bart.

Wie groß war die durchschnittliche Änderung des Meeresspiegels pro Jahr zwischen 1993 und 2015?

- a) ca. 3,5 mm
- b) ca. 9,8 mm
- c) ca. 2,1 mm
- d) ca. 0,5 mm

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Das "Mathe im Advent"-Team
Mathe im Leben gemeinnützige GmbH
<http://www.mathe-im-advent.de>



2016: Aufgaben Klasse 7-9
12. Die Weihnachtsinsel



Lösung:

Antwortmöglichkeit a) ist richtig. Der Meeresspiegel ist zwischen 1993 und 2015 pro Jahr um durchschnittlich 3,5 mm gestiegen.

Um die durchschnittliche Steigung des Meeresspiegels zu ermitteln, musst du die Werte für die Veränderung des Meeresspiegels im Diagramm ablesen. Wenn zwischen den Messungen der Wasserspiegel gestiegen ist, ist es eine positive Zahl. Wenn der Meeresspiegel gesunken ist, ist die Steigung negativ. Im Jahr 1993 wurde das erste Mal der Meeresspiegel gemessen. Mit dieser Höhe werden alle Messungen verglichen, es ist sozusagen die „Nullhöhe“. Zum Beispiel ist der Meeresspiegel bei der zweiten Messung 5 mm höher als 1993. Im nächsten Jahr 1995 ist der Meeresspiegel um weitere 3 mm gestiegen. Er lag dann bei 8 mm über der „Nullhöhe“ von 1993. Für die Berechnung des Durchschnitts bis 2015 hast du nun mehrere Möglichkeiten.

1. Möglichkeit:

Der Durchschnitt der Meeresspiegel lässt sich am einfachsten berechnen, indem du den gesamten Anstieg von 1993 bis 2015 nimmst und ihn durch die Anzahl der Jahre teilst, die in diesem Zeitraum liegen:

Den gesamten Anstieg bis 2015 kannst du direkt aus dem Diagramm ablesen: ca. 77mm.

Die Anzahl der Jahre sind: $2015 - 1993 = 22$

Der durchschnittliche Anstieg beträgt also:

$$77 \text{ mm} : 22 \text{ Jahre} = 3,5 \text{ Millimeter pro Jahr}$$

2. Möglichkeit:

Du erstellst dir eine Tabelle, in der du den jeweilige Änderungen zwischen zwei aufeinander folgenden Messungen einträgst. Jedes Jahr seit 1993 bis einschließlich 2015 hat eine neue Messung des Meeresspiegels stattgefunden. Addierst du alle Jahresänderungen der Meeresspiegel und teilst sie durch die Anzahl der Messwerte (Jahre), bestimmst du die durchschnittliche Änderung pro Jahr.

Hier die Tabelle der jährlichen Änderungen des Meeresspiegels:

Messungen	Jahre	Steigung in mm
1 und 2	1993 → 1994	5
2 und 3	1994 → 1995	3
3 und 4	1995 → 1996	-2
4 und 5	1996 → 1997	4
5 und 6	1997 → 1998	9
6 und 7	1998 → 1999	1
7 und 8	1999 → 2000	6
8 und 9	2000 → 2001	2
9 und 10	2001 → 2002	5
10 und 11	2002 → 2003	5
11 und 12	2003 → 2004	2

Messungen	Jahre	Steigung in mm
12 und 13	2004 → 2005	3
13 und 14	2005 → 2006	3
14 und 15	2006 → 2007	1
15 und 16	2007 → 2008	0
16 und 17	2008 → 2009	5
17 und 18	2009 → 2010	6
18 und 19	2010 → 2011	-5
19 und 20	2011 → 2012	9
20 und 21	2012 → 2013	9
21 und 22	2013 → 2014	-1
22 und 23	2014 → 2015	7



2016: Aufgaben Klasse 7-9
12. Die Weihnachtsinsel



Insgesamt erhöhte sich das Wasser seit Beginn der Messungen um die Summe aller einzelnen Änderungen:

$$5 + 3 - 2 + 4 + 9 + 1 + 6 + 2 + 5 + 5 + 2 + 3 + 3 + 1 + 0 + 5 + 6 - 5 + 9 + 9 - 1 + 7 = 77$$

Im Jahr 2015 war der Meeresspiegel um 77 mm höher als im Jahr 1993. Der Zeitraum betrug 22 Jahre.

Um den Durchschnitt aller Steigungen zu berechnen, musst du folgenden Quotienten bilden:

$$77 : 22 = 3,5.$$

Der Meeresspiegel ist also jedes Jahr durchschnittlich um 3,5 mm gestiegen.

3. Möglichkeit:

Du kannst dir in einem Diagramm das Steigungsdreieck zur Hilfe nehmen. Verbinde den ersten Datenpunkt P(1993|0) und den letzten Datenpunkt Q(2015|77) mit einer geraden Linie und berechne die Steigung dieser Geraden:

$$m = \frac{77 - 0}{2015 - 1993} = \frac{77}{22} = 3,5$$

Blick über den Tellerrand: Anstieg des Meeresspiegels

Der Name der Insel *Kiribati*, die Eddie jedes Jahr besucht, basiert auf der Koralleninseln *Kiritimati*. Sie gehört zum *Inselstaat Kiribati* (einheimische Aussprache: Kiribas). *Kiritimati* ist das kiribatische Wort für *Christmas*, also für Weihnachten. Im deutschen wird Kiritimati daher auch *Weihnachtsinsel* genannt.

Uriams Erzählungen entsprechen leider der Wirklichkeit: Kiribati leidet unter Zerstörungen durch das Meer. Vor ein paar Jahren hat der damalige Präsident *Anote Tong* daher vorsichtshalber ein Stück Land auf den benachbarten *Fidschi Inseln* gekauft, um einen Teil der Bevölkerung Kiribatis im Notfall umsiedeln zu können.

Viele Wissenschaftler_innen sind jedoch der Meinung, dass Kiribati nicht so schnell untergehen wird. Auch ist unklar, inwieweit die Zerstörungen durch das Meer wirklich mit dem ansteigenden Meeresspiegel zusammenhängen.

Fakt ist jedoch, dass der Meeresspiegel steigt und dass dies vor allem in Küstenregionen zu Problemen führt bzw. noch führen wird. Überschwemmungen, stärkere Sturmfluten und das Versalzen der Böden sind nur einige mögliche Folgen.

Die Daten, die du in der Aufgabe ausgewertet hast, stammen von der NASA (die US-amerikanische Raumfahrtbehörde). Ein durchschnittlicher Anstieg von ca. 3,5 mm pro Jahr seit 1993 entspricht also der Realität.

Es gibt Prognosen, nach denen einige Länder besonders unter dem steigenden Meeresspiegel leiden werden. Beispiele hierfür sind die Niederlande und Bangladesch. Der Grund, warum diese Länder stärker betroffen sind als andere, liegt unter anderem daran, dass sie sehr niedrig gelegen und flach sind. Für Bangladesch werden die Folgen den Vorhersagen nach besonders stark sein, da es – im Gegensatz zu den Niederlanden – ein armes Land ist und nur begrenzt Gegenmaßnahmen (wie das Errichten von Dämmen) ergreifen kann.

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 7-9
12. Die Weihnachtsinsel



Die Hauptgründe für den Anstieg des Meeresspiegels sind vor allem das Ausdehnen des Meeres durch den Temperaturanstieg und das Abschmelzen von Gletschern. Bis ins letzte Detail sind die Ursachen für den Meeresspiegelanstieg jedoch noch nicht geklärt.

Lesetipps:

<http://www.spiegel.de/wissenschaft/natur/nasa-forscher-befuerchten-deutlichen-anstieg-des-meeresspiegels-a-1050045.html>

und vom Wissenschaftsjahr 2016*17 — Meere und Ozeane:

<https://www.wissenschaftsjahr.de/2016-17/das-wissenschaftsjahr/themenschwerpunkte/wetterkueche-und-klimamaschine/meere-ozeane-und-das-klima/seite/24.html>



2016: Aufgaben Klasse 7-9
13. Interessante Nachbarn



Statistikwichtel Balduin versinkt mal wieder in Arbeit. Deswegen hat er seine Praktikantin Golda gebeten, ein paar Nebenrechnungen für ihn zu machen.

Während sie nun an ihrem Schreibtisch sitzt und alle möglichen Zahlen zusammenrechnet, macht sie plötzlich eine Feststellung: Die Zahl 9 lässt sich nicht nur als Summe von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen schreiben, sondern auch als Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen. Es gilt $4 + 5 = 9$, aber auch $2 + 3 + 4 = 9$.

Für einen Moment vergisst Golda ihre Rechnungen. Sie beginnt nach anderen Zahlen zu suchen, die sich auf diese beiden Arten schreiben lassen. Sie stellt fest: „Bei der Zahl 5 funktioniert das schon mal nicht... zwar ist $2 + 3 = 5$, aber als Summe von drei Nachbarzahlen, kann man die 5 nicht schreiben.“



So leicht gibt sie aber nicht auf. „Die 9 kann ja nicht die einzige Zahl sein, die diese Eigenschaft hat. Das wäre ja schon wahnsinniger Zufall.“ Auf ihrer Suche nach weiteren Zahlen, macht sie einige interessante Beobachtungen. Aber nicht alle Beobachtungen sind richtig.

Welche der folgenden Beobachtungen ist falsch?

- a) Jede Zahl, die durch drei teilbar ist, lässt sich als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben.
- b) Jede ungerade Zahl lässt sich als Summe von zwei Nachbarzahlen schreiben.
- c) Teilt man eine Zahl, die sich als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben lässt, durch drei, erhält man die mittlere der drei Nachbarzahlen.
- d) Jede Zahl, die durch sechs teilbar ist, lässt sich sowohl als Summe von zwei als auch als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben.

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Das "Mathe im Advent"-Team

Mathe im Leben gemeinnützige GmbH

<http://www.mathe-im-advent.de>

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 7-9
13. Interessante Nachbarn



Lösung:

Antwortmöglichkeit d) ist richtig. Zwar lässt sich jede sechste Zahl auf beide genannten Arten darstellen, aber nicht jede Zahl, die durch sechs teilbar ist, hat diese Eigenschaften.

Schau dir zunächst ein paar Beispiele zu allen Antwortmöglichkeiten an. Vermutlich wirst du dann eine Vermutung haben, welche Aussagen richtig sind und welche Aussage falsch ist. Das solltest du dann allerdings noch begründen.

a) Jede Zahl, die durch drei teilbar ist, lässt sich als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben.

Für die 3 funktioniert es: $0 + 1 + 2 = 3$, ebenso für die $1 + 2 + 3 = 6$ und für die $2 + 3 + 4 = 9$. Vielleicht hast du jetzt schon eine Beobachtung gemacht. Es wird immer die Kleinste der drei Nachbarzahlen weggenommen und stattdessen die nächsthöhere Nachbarzahl zur Summe hinzugefügt. Damit kannst du immer die nächste Zahl, die durch drei teilbar ist, als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben. Das funktioniert, weil die Differenz zwischen der neuen und der gelöschten Nachbarzahl immer genau 3 ist.

Ein Beweis dafür, sieht folgendermaßen aus:

Um den allgemeinen Beweis zu führen, benötigst du Platzhalter (auch Variablen genannt) für die Zahlen. Man nimmt da üblicherweise Buchstaben die für eine beliebige natürliche Zahl stehen. Wir nehmen hier n und k .

Wenn die Zahl n durch 3 teilbar ist, dann kannst du sie auch als $n = 3 \cdot k$ schreiben. Dabei ist k das Ergebnis der Divisionsaufgabe $k = n : 3$.

Nun kannst du den Ausdruck noch weiter zerlegen: $n = 3 \cdot k = k + k + k$

Der Vorgänger von k ist $k - 1$ und der Nachfolger von k ist $k + 1$. $k - 1$, k und $k + 1$ sind drei benachbarte Zahlen.

Wenn du diese drei Zahlen addiert, dann bekommst du wieder n heraus. Du weißt somit, dass die Aussage $(k - 1) + k + (k + 1) = k + k + k - 1 + 1 = k + k + k = 3 \cdot k = n$ stimmt.

b) Jede ungerade Zahl lässt sich als Summe von zwei Nachbarzahlen schreiben.

Wenn eine Zahl n ungerade ist, dann kannst du sie schreiben als $n = 2 \cdot k + 1$. Dabei ist k die Zahl, für die dieser Ausdruck stimmt.

Ähnlich wie im Teil a) kannst du den Ausdruck weiter zerlegen: $n = 2 \cdot k + 1 = k + k + 1 = k + (k + 1)$

Der Nachfolger von k ist $k + 1$. Das sind zwei benachbarte Zahlen.

c) Teilt man eine Summe der drei Nachbarzahlen durch 3, erhält man die mittlere der drei Nachbarzahlen.

Diese Aussage hast du bereits in a) gezeigt.

Falls es dir schwerfällt, mit Buchstaben statt Zahlen zu arbeiten, kannst du es dir auch nochmal mithilfe eines Zahlenbeispiels klar machen, z.B. ist $2 + 3 + 4 = 9$ und $9 : 3 = 3$.



2016: Aufgaben Klasse 7-9
13. Interessante Nachbarn



d) Jede Zahl, die durch 6 teilbar ist, lässt sich sowohl als Summe von zwei als auch als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben.

Diese Aussage stimmt schon für die 6 nicht: 6 ist durch 6 teilbar und lässt sich auch als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben $1 + 2 + 3 = 6$. Aber die 6 lässt sich nicht als Summe von zwei Nachbarzahlen schreiben. Das kannst du ausprobieren: $2 + 3 = 5$ und $3 + 4 = 7$, dazwischen gibt es keine weiteren Möglichkeiten.

Antwortmöglichkeit d) ist also falsch.

Mathematische Exkursion

In der Lösung hast du gesehen, dass sich eine Zahl, die durch 6 teilbar ist, nicht sowohl als Summe von zwei als auch als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben lässt. Allerdings stimmt es, dass sich jede 6. Zahl auf beide Weisen darstellen lässt. Es stimmt für die 3, genauso wie für die 9, die 15, die 21 usw. Es stimmt für jede Zahl, die sowohl durch 3 teilbar ist und die ungerade ist. Und dies ist eben bei jeder 6. Zahl der Fall.

Aber wie sieht es mit Zahlen aus, die sich als Summe von vier Nachbarzahlen schreiben lassen? Oder als Summe von fünf Nachbarzahlen? Haben diese Zahlen auch bestimmte Eigenschaften?

Dafür schauen wir uns zunächst ein Beispiel für eine Summe von vier Nachbarzahlen an. Die kleinste Zahl, die sich als Summe von vier (positiven) Nachbarzahlen schreiben lässt ist:

$$0 + 1 + 2 + 3 = 6.$$

Nun verwenden wir das gleiche Argument, das wir schon in der Lösung verwendet haben: Wir nehmen die erste Nachbarzahl (0) weg und geben die nächste Nachbarzahl (4) dazu. Insgesamt addieren wir also 4 dazu. Die nächste Zahl, die sich als Summe von vier Nachbarzahlen schreiben ist also:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Jede weitere 4. Zahl, begonnen bei der 6, lässt sich damit als Summe von 4 Nachbarzahlen schreiben.

Diese Argumentation können wir jetzt für eine beliebige Summe von Nachbarzahlen führen. Nennen wir die Anzahl der Nachbarzahlen m . Die erste Zahl, die sich als Summe von m Nachbarzahlen schreiben lässt (nennen wir sie n) sieht also so aus:

$$n = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (m-1).$$

Jetzt nehmen wir wieder die erste Nachbarzahl (0) weg und geben die nächste Nachbarzahl m dazu:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (m-1) + m.$$

Diese Zahl ist genau um m größer, als die erste Zahl n . Dies können wir immer so weiter machen. Es lässt sich also jede weitere m -te Zahl als Summe von m Nachbarzahlen schreiben, begonnen bei der ersten Zahl, die man auf diese Weise schreiben kann.

Für die Summe von einer ungeraden Anzahl an Nachbarzahlen gilt immer, dass diese Zahl durch die Anzahl der Nachbarzahlen teilbar ist. Für die Summe von 3 Nachbarzahlen haben wir dies bereits in der Aufgabe festgestellt. Überprüfe diese Behauptung auch für die Summe von 5 (oder 7,9,... usw.) Nachbarzahlen.



2016: Aufgaben Klasse 7-9

16. Wunschzettel aus Japan

Die Statistikabteilung der Wichtelverwaltung hat einen wichtigen Auftrag: Sie versucht jedes Jahr im Sommer abzuschätzen, wie viele Geschenke sich die Kinder wohl dieses Jahr wünschen werden. Umso besser sind die Geschenkewichtel dann vorbereitet, wenn die Wunschzettel aus der ganzen Welt eintreffen.

Für jedes Land haben die Statistikwichtel deshalb Vorhersagen erstellt, wie sich die Kinderzahl wohl entwickeln wird. Pro Jahr werden diese Vorhersagen allerdings nur für wenige Länder aktualisiert. Für Japan haben die Statistikwichtel das letzte Mal im Jahr 1950 eine Vorhersage erstellt. Damals gingen sie von folgenden Werten aus:

- 1950 lebten in Japan ca. 83 Millionen Menschen. Die Wichtel hatten errechnet, dass die Bevölkerung zwischen 1910 und 1950 alle 5 Jahre um etwa 6% gewachsen ist. Sie nahmen an, dass sie nach 1950 genauso weiter wachsen würde.
- Der Anteil der Kinder zwischen 0 und 14 Jahren betrug 1950 in Japan etwa 35%. Auch hier gingen die Wichtel davon aus, dass sich das nicht ändert und dass jedes Kind einen Wunschzettel pro Jahr schreibt.

Im letzten Jahr haben die Wichtel 17 Millionen Wunschzettel aus Japan erhalten.



Wie viele Wunschzettel hätten die Wichtel nach ihrer Vorhersage aus dem Jahr 1950 eigentlich im letzten Jahr erhalten müssen?

- etwa 17 Millionen, so viele wie sie tatsächlich erhalten haben
- etwa 32 Millionen
- etwa 62 Millionen
- etwa 94 Millionen

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Das "Mathe im Advent"-Team

Mathe im Leben gemeinnützige GmbH

<http://www.mathe-im-advent.de>

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 7-9

16. Wunschzettel aus Japan



Lösung:

Antwortmöglichkeit c) ist richtig. Die Wichtel hätten 2015 nach ihrer Vorhersage ca. 62 Millionen Wunschzettel erhalten müssen.

Die Wichtel haben zuletzt 1950 eine Vorhersage erstellt. Das ist bereits lange her. In der Zwischenzeit kann viel passiert sein, was die Entwicklung der Bevölkerung beeinflusst hat. Mehr dazu lernst du im Blick über den Tellerrand.

Wie viele Wunschzettel hatten die Wichtel nun für letztes Jahr mit der Vorhersage von 1950 vorausgesagt? Die Vorhersage wurde bereits vor $2015 - 1950 = 65$ Jahren erstellt. Laut der Vorhersage wächst die Bevölkerungszahl alle fünf Jahre um 6 %. Das heißt, die Bevölkerungszahl ist $65 \text{ Jahre} : 5 \text{ Jahre} = 13$ Mal um 6 % gewachsen.

Im Jahr 1950 betrug die Bevölkerungszahl 83 Millionen. Nach fünf Jahren, im Jahr 1955, betrug die Bevölkerungszahl laut der Vorhersage also $83 + 83 \cdot (1 + 0,06) = 83 \cdot 1,06 = 83 \cdot 1,06 \approx 88$ Millionen. Um die Bevölkerungszahl für das Jahr 2015 zu abzuschätzen, musst du diese Rechnung insgesamt 13 Mal durchführen:

$$83 \text{ Millionen} \cdot \underbrace{1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06}_{13\text{-mal}}$$

Das lässt sich kompakt so schreiben:

$$83 \text{ Millionen} \cdot 1,06^{13} \approx 177 \text{ Millionen.}$$

Im Jahr 2015 gäbe es laut der Vorhersage von 1950 etwa 177 Millionen Menschen in Japan. Sie geht zudem von einem Kinderanteil von weiterhin 35% aus. Nach der Vorhersage gäbe es also ungefähr $177 \cdot 35\% = 177 \cdot \frac{35}{100} = 177 \cdot 0,35 \approx 62$ Millionen Kinder in Japan.

Die Wichtel hätten letztes Jahr also eigentlich etwa 62 Millionen Wunschzettel erhalten müssen. Deutlich mehr, als sie tatsächlich erhalten haben.

Blick über den Tellerrand: Vorsicht mit Prognosen

Was ist bei der *Prognose* der Wichtel nun aber so gewaltig schief gegangen? Die Statistikwichtel haben angenommen, dass der Anteil der Kinder sich nicht ändern wird. Dies war eine klare Fehleinschätzung: Die japanische Gesellschaft hat sich in der 2. Hälfte des 20. Jahrhunderts sehr gewandelt. Die Geburtenrate ist in den letzten Jahrzehnten stark gesunken.

Um 1940 gab es in Japan noch über 30 Geburten pro 1000 Einwohner. Bis heute ist die Zahl auf ca. 8 Geburten pro 1000 Einwohner zurückgegangen. Dadurch, dass immer weniger Kinder geboren wurden, hat sich natürlich auch die Rate des Bevölkerungswachstums geändert. Diese ist immer mehr zurückgegangen, bis sie 2008 das erste Mal negativ war. Das heißt, dass die Bevölkerungszahl Japans seit dem nicht einfach nur langsamer wächst, sondern sogar zurückgeht. Durch die niedrigen Geburtenraten ist der Anteil der Kinder zwischen 0-14 Jahren stark zurückgegangen. Von ca. 35 Prozent im Jahr 1950 auf 13 Prozent im Jahr 2015.

Die Wichtel haben sich die Werte für ihre Annahmen auch nicht besonders geschickt ausgewählt. Im Zeitraum zwischen 1910 und 1950 war Japan in viele Kriege verwickelt, die Ausbreitung des Landes änderte sich häufig. Teilweise standen sogar ganz Korea und Teile von China unter japanischer Herrschaft. Nach dem Zweiten Weltkrieg hatte Japan große Teile wieder verloren. Dieser instabile

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 7-9

16. Wunschzettel aus Japan

Zeitraum konnte deshalb keine verlässlichen Daten für eine *Hochrechnung* liefern. Es ist also kein Wunder, dass die Wichtel mit ihrer Prognose so daneben lagen. Es ist also kein Wunder, dass die Wichtel mit ihrer Prognose so daneben lagen.

Einer aktuellen Prognose auf der Wikipedia-Seite "Demografie Japans" (https://de.wikipedia.org/wiki/Demografie_Japans) zufolge soll sich die Bevölkerungszahl Japans von aktuell ca. 127 Millionen bis zum Jahr 2100 auf ca. 64 Millionen halbieren. Aber Vorsicht: Auch diese Vorhersage geht von aktuellen Geburten- und Sterberaten aus, die sich – wie wir gelernt haben – über die Jahre drastisch ändern können.

Vorhersagen – auch in anderen Bereichen – solltest du immer mit Vorsicht betrachten. Vor allem wenn es um Aussagen zu Dingen geht, die weit in der Zukunft liegen. Die Geburtenrate wird durch viele Faktoren beeinflusst, zum Beispiel von der wirtschaftlichen Entwicklung eines Landes, von Kriegen, gesellschaftspolitischen Entwicklungen (z.B. des Rentensystems) oder auch von der Bildung der Frauen. Je mehr Faktoren gut analysiert und in das Berechnungsmodell einbezogen werden, umso besser wird die Vorhersage. Es ist allerdings fast unmöglich diese Entwicklungen über einen sehr langen Zeitraum wie 100 Jahre verlässlich vorherzusagen.



2015: Aufgaben Klasse 7-9
7. Wehe, wenn sie losgelassen



In den letzten Wochen vor dem anstrengenden Flug in der Heiligen Nacht werden die Rentiere mit Spezialstroh gefüttert. Das Stroh wird in einem speziellen Stall ausgestreut. In diesem Stall stehen vier Boxen hintereinander, auf die sich die Rentiere beim Fressen aufteilen sollen. Nachdem das Stroh in den Boxen ausgelegt wurde, stürmt die erste Gruppe von 33 Rentieren herbei. Die Rentieroberwichtel Kasimir und Bertrada kennen ihre Schützlinge genau und wissen: Wenn man sie nicht kontrolliert, werden sie alle in die erste Box (vom Eingang aus gesehen) stürmen und sich dort in einem riesigen Durcheinander über das Stroh hermachen.

Deshalb haben sie sich einen kontrollierten Ablaufplan ausgedacht. Die Auszubildenden Ragna und Ottilie helfen bei der Durchführung, denn alleine würden die Rentiere sie einfach überrennen. Der Plan umfasst drei Regeln:

1. Die Rentiere werden einzeln in den Stall gelassen.
2. Wenn in allen Boxen gleich viele Rentiere stehen, darf sich das nächste Rentier aussuchen, in welche Box es geht (gilt insbesondere auch für das erste Rentier).
3. Wenn ungleich viele Rentiere in den vier Boxen stehen, muss das nächste Rentier eine der Boxen wählen, in der am wenigsten Rentiere stehen. Wenn es dafür mehrere Möglichkeiten gibt, muss es die Box wählen, die am weitesten von der zuletzt gewählten entfernt ist.

Vor dem Stall stehen 33 Rentiere. In welche Box muss das letzte Rentier hineingehen, wenn alle Rentiere die Regeln einhalten?



- a) Es kann sich aussuchen, in welche Box es geht.
- b) Es muss in die erste Box gehen.
- c) Es kann zwischen den beiden mittleren Boxen wählen.
- d) Es muss in die letzte Box gehen.



2015: Aufgaben Klasse 7-9
7. Wehe, wenn sie losgelassen



Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Das „Mathe im Advent“-Team

Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV)

<https://dmv.mathematik.de>



2015: Aufgaben Klasse 7-9
7. Wehe, wenn sie losgelassen



Lösung:

Antwortmöglichkeit a) ist richtig. Es kann sich aussuchen, in welche Box es geht.

Du kannst diese Aufgabe mit einer Mischung aus Nachdenken und Rechnen lösen:

Wenn das letzte Rentier an der Reihe ist, bedeutet dies, dass sich bereits 32 der Rentiere in die vier Boxen eingeordnet haben.

Laut Regel 3 darf sich ein Rentier die Box nicht frei aussuchen, wenn es eine ungleiche Anzahl Rentiere in den Boxen gibt. Dies ist der Fall, wenn sich die Anzahl der Rentiere, die sich bereits in einer Box befinden nicht durch vier teilen lässt, denn da es vier Boxen gibt, ist die Anzahl der Rentiere, die sich in diesen befinden durch vier teilbar, wenn in jeder Box gleich viele Rentiere sind.

Wenn also Regel 3 immer befolgt wird, befinden sich in den Boxen immer die gleiche Anzahl Rentiere, wenn sich die Gesamtanzahl der Rentiere, die bereits im Stall sind, durch 4 teilen lässt.

Wenn das letzte Rentier an der Reihe ist, befinden sich 32 Rentiere in den Boxen. Die Zahl 32 lässt sich glatt durch 4 teilen. Somit befindet sich in jeder Box die gleiche Anzahl Rentiere und das letzte Rentier darf sich nach der 2. Regel frei aussuchen in welche der vier Boxen es geht.

Also ist Antwortmöglichkeit a) die richtige Antwort.

Blick über den Tellerrand

Das Schubfachprinzip ist ein einfaches, aber auch sehr wichtiges Beweisprinzip aus der Mathematik. Mit diesem Prinzip lassen sich gewisse Aussagen über endliche Mengen beweisen.

Der Name des Schubfachprinzips kommt von einer bildhaften Vorstellung, die das Prinzip sehr gut erklärt: Stell dir vor, du hast eine bestimmte Anzahl von Schubfächern und du legst mehr Objekte in die Fächer, als Fächer vorhanden sind, dann befindet sich in mindestens einem der Fächer, mindestens zwei Objekte.

Geschichtlich stammt das Schubfachprinzip von dem Mathematiker *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (1805-1859). Er soll es zumindest erstmals benannt haben. Er betrachtete dabei die möglichen Eigenschaften als Schubfächer, in die Dinge dann gelegt wurden. Sind nun mehr Dinge als Schubfächer auf die Schubfächer verteilt worden, so müssen schlussendlich, in einer Schublade mindestens zwei Dinge vorhanden sein.

Heute ist dieses Prinzip auch als Taubenschlagprinzip bekannt. Die Argumentation ist die gleiche: Wenn mehr als n Tauben auf n Taubenschläge verteilt werden, so sind in einem Schlag mindestens zwei Tauben. Du weißt nur nicht, in welchem Taubenschlag sie sind und auch nicht, wie viele Tauben dort drin sind.

Daraus bildet sich folgende mathematische Definition: m und n stehen für eine beliebige natürliche Zahl >1 .

"Ordnet man m Elementen n Eigenschaften zu, wobei $n < m$ ist, so gibt es eine Eigenschaft, die von mindestens zwei Elementen angenommen wird."



2015: Aufgaben Klasse 7-9
7. Wehe, wenn sie losgelassen



ODER

"Ordnet man $n + 1$ oder mehr Elementen n Eigenschaften zu, so gibt es eine Eigenschaft, die von mindestens zwei Elementen angenommen wird."

Und ein wenig einfacher formuliert:

"Werden m Objekte in n Kategorien eingeteilt, wobei $n < m$ ist, so gibt es mindestens eine Kategorie, die mindestens zwei Objekte enthält."

Dazu ein paar Beispiele:

1. Einer Gruppe von vier Kindern werden fünf Kaugummis geschenkt. Diese fünf Kaugummis werden an die vier Kinder verteilt (ohne, dass ein Kaugummi zerteilt wird). So gibt es ein Kind, das mehr als einen Kaugummi bekommt. (Kaugummis = Objekte; Kinder = Kategorien/Fächer)
2. Unter 13 Personen haben mindestens 2 im selben Monat Geburtstag. (Personen = Objekte; Monate = Kategorien/Fächer). Auch wenn jeder der ersten 12 Personen einem der 12 Monate zugeordnet wird, muss die 13. Person einem Monat zugeordnet werden (in diesem Fall in diesem Geburtstag haben), in dem schon eine andere Person ist. Und auch, wenn alle der 13 Personen im gleich Monat Geburtstag hätten, wäre das Prinzip erfüllt, da mehr als zwei Personen im gleichen Monat Geburtstag haben.
3. Von 11 natürlichen Zahlen enden mindestens zwei auf die gleiche Ziffer, weil es nur 10 verschiedene Ziffern gibt und dann mindestens eine mindestens doppelt vorkommen muss.
4. Bei einem Memoryspiel gibt es 32 Paare. Wie viele Karten musst du herausnehmen, um sicher ein Paar zu haben? Nach dem Schubfachprinzip gibt es 32 verschiedene Motive: Motiv-1, Motiv-2, ..., bis Motiv-32. Wählst du aus dem Stapel 33 Karten aus, so ist mindestens in einem der Schubfächer ein Paar vorhanden.

Dieses Prinzip kommt dir wahrscheinlich selbstverständlich und vollkommen selbsterklärend vor, trotzdem hilft es bestimmte mathematische Sachverhalte zu beweisen. Die Argumentation eines Beweises nach dem Schubfachprinzip funktioniert in der Regel indirekt über einen Widerspruch:

Falls das Schubfachprinzip nicht stimmt, landet in jedem Schubfach höchstens ein Objekt. Somit kann es höchstens so viele Objekte wie Schubfächer geben, was aber im Widerspruch zur Voraussetzung steht, dass es nämlich mehr Objekte als Schubfächer gibt.